тельно: ведь даже такой выдающийся представитель науки того времени, как Кеплер, занимался составлением гороскопов.

Свой метод Декарт связывает прежде всего с необходимостью познания природы. Именно поэтому он противопоставляет его откровению, которое де „разом подымает нас до безошибочной веры“ и потому не пригодно для изучения природы. Декарт осуждает тех, которые хотят „одним прыжком“ достигнуть истины. Это значит, что в изучении природы Декарт рекомендует рассчитывать не на помощь свыше, а лишь на свои собственные силы, на правильный научный метод, который хоть и не сразу, но зато наверняка в конечном счете приведет к истинному знанию.

По мысли Декарта, недостаточно только иметь хороший разум, главное — это хорошо применять его. Декарт доходит даже до того, что считает способность к разумному мышлению, в общем, одинаковой у всех людей и все различие, наблюдающееся в интеллектуальном уровне различных людей, сводит лишь к большему или меньшему уменью методически мыслить. С этим связано даваемое им определение научного метода, сущность которого составляет „точные и простые правила, строгое соблюдение которых всегда препятствует принятию ложного за истинное и, без излишней траты умственных сил, но постепенно и непрерывно увеличивая знания, способствует тому, что ум достигает истинного познания всего, что ему доступно“.[1] Конечно, сведение метода к правилам познающего истину мышления, к правилам, рассматриваемым лишь как приемы, изобретенные разумом, — характерная черта метафизического подхода к действительности.

И. В. Сталин, характеризуя существо диалектического подхода, подчеркивает: „Диалектический метод говорит, что жизнь нужно рассматривать именно такой, какова она в действительности“.[2] Это значит, что научный метод должен

---

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 89.
[2] И. Сталин, Соч., т. I, стр. 298.

быть аналогом действительности, отражением присущих ей законов, познание которых применяется к дальнейшему изучению объективной реальности. Таков марксистский диалектический метод, основные черты которого отражают основные законы развития природы и общества. Декарт безусловно был далек от такого подлинно научного понимания метода. Однако предложенная им система методического, последовательного и доказательного теоретического мышления сыграла громадную роль в борьбе против схоластики. Основные черты картезианского метода были выражением необходимости аналитического изучения, описания, классификации явлений природы, порожденной развитием капиталистического уклада.

Подобно своему предшественнику Ф. Бэкону, Декарт считал основной, решающей предпосылкой правильного методического познающего мышления отказ от всего принятого на веру, универсальное сомнение во всем. Но так как задачей этого методологического сомнения является нахождение критерия истины и безусловно достоверного исходного пункта последующих логических умозаключений, то Декарт считает возможным сомневаться во всем, даже в том, что в дальнейшем окажется истиной. Поэтому Декарт подвергает сомнению не только положения схоластической лженауки, но и данные естествознания и вообще данные чувственного восприятия. „Так как, — пишет он, — чувства нас иногда обманывают, я допустил, что нет ни одной вещи, которая была бы такова, какой она нам представляется“ (32), ибо благоразумие требует не доверять всецело тому, что хоть однажды нас обмануло. Декарт решительно настаивает на том, что необходимо хотя бы раз в жизни предпринять решительную попытку отделаться от всех мнений, принятых на веру, и начать все сначала, с самого основания. Не следует ставить каких бы то ни было границ сомнению. „Я стану думать, — пишет Декарт, — что небо, воздух, земля, цвета, формы, звуки и все остальные внешние вещи — лишь иллюзии и

грезы... Я буду считать себя не имеющим ни рук, ни глаз, ни тела, ни крови, не имеющим никаких чувств, но ошибочно уверенным в обладании всем этим".[1] Таким образом, сомнение, по Декарту, не должно останавливаться даже перед крайностями солипсизма, но при всем этом оно должно быть не убеждением в отсутствии чего-либо достоверного (что нарушало бы принцип методологического сомнения), а лишь условным приемом, предварительным постулатом. Декарт решительно подчеркивает, что он не собирается подражать скептикам, которые „сомневаются только для того, чтобы сомневаться, и притворяются в постоянной нерешительности. Моя цель, напротив того, была достичь уверенности и, отбросив зыбучие наносы и песок, найти твердую почву" (30).

Вывод, к которому приходит Декарт, таков: можно сомневаться во всем, кроме того, что ты сомневаешься. Акт сомнения, мышления всегда, как бы далеко ни простиралось сомнение, остается несомненно существующим. Я мыслю, следовательно существую (cogito, ergo sum), — таково, по мысли Декарта, основное, незыблемое, не вызывающее каких бы то ни было сомнений положение, которое может быть исходным пунктом всех логических выводов, всего познания. Таким образом, по мнению Декарта, здание науки может быть воздвигнуто на абсолютно нерушимом фундаменте, ввиду чего всякое скептическое отношение к основам познания вообще и логического мышления в особенности должно быть признано в корне несостоятельным. Существует такое теоретическое положение, сомнения в котором просто невозможны, — оно и должно быть исходным пунктом теоретического познания, подобно тому как аксиомы образуют начала в геометрии. Исторически прогрессивное значение декартовского „cogito ergo sum" заключается, следовательно, в его направленности против скептицизма, в постановке вопроса об основе процесса познания.

---

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 340.

Однако нельзя не отметить, что эта постановка вопроса носит сугубо метафизический и идеалистический характер. Декарт не видит того, что сама жизнь, практика должна быть первой, отправной предпосылкой теории познания. Не видит он и того, что существование внешнего мира, объективной реальности не может быть доказано логическими рассуждениями: оно постоянно доказывается практикой. „Вопрос о том, свойственна ли человеческому мышлению предметная истина, вовсе не есть вопрос теории, а вопрос *практический*. На практике должен человек доказать истинность, т. е. действительность и силу, посюсторонность своего мышления. Спор о действительности или недействительности мышления, изолированного от практики, есть чисто *схоластический* вопрос“.[1] В свете этого высказывания Маркса становится очевидным, что декартовское „cogito, ergo sum“ является в определенном отношении уступкой схоластике и идеализму, что же касается методологического сомнения Декарта, сыгравшего известную прогрессивную роль, то оно используется Декартом для обоснования идеалистического тезиса о независимости мышления от внешнего мира. Разве ощущения, практические действия человека не свидетельствуют о его существовании? Почему же Декарт говорит именно о мышлении как о неопровержимом свидетельстве бытия человека? Это необходимо ему для того, чтобы затем сделать вывод, что „я — субстанция, вся сущность или природа которой состоит в мышлении и которая для своего бытия не нуждается в месте и не зависит ни от какой материальной вещи“ (33). Само собой разумеется, что этот вывод, как отмечали еще Гоббс и Гассенди, совершенно несостоятелен и даже формально не вытекает из установленного Декартом основоположения. Тщетны также попытки Декарта доказать, что основоположение — я мыслю, следовательно существую — не является умозаключением, а представляет собой непосредственное, интуитивно данное и

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. IV, стр. 589.

потому безусловно истинное. Во всем этом сказывается лишь стремление Декарта противопоставить туманным, неопределенным и путанным догмам схоластики ясное и отчетливое знание. Но стремление это остается лишь постановкой вопроса, не получающей научного разрешения.

Отмечая несостоятельность и в сущности бесплодность этой отправной теоретической предпосылки метода Декарта, мы должны все же подчеркнуть, что заслугой этого мыслителя была развернутая постановка вопроса о критерии истины.

Декарт полагал, что неотъемлемым признаком истины является ясность и отчетливость, интуитивно осознаваемая самоочевидность, исключающая какое бы то ни было сомнение. Это и составляет содержание первого правила устанавливаемого им метода познания: „Не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои суждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не сможет дать повод к сомнению“ (22).

Не трудно, конечно, показать, что декартовский критерий истины носит субъективный характер, поскольку он изолирует познающее мышление от внешнего мира и не видит, что лишь в сопоставлении представлений, понятий с предметами, которые они отражают, обнаруживается истина или заблуждение. Практика является критерием истины. Но для Декарта, как и для всех буржуазных философов, практика представляется лишь в виде деятельности, преследующей определенную выгоду, обычно независимую от познания истины. Отделяя познание от практики, Декарт в нем самом пытается отыскать то, что отделяет истину от заблуждения. Критерий истины, устанавливаемый Декартом, в сущности носит психологический характер. Многое из того, что представлялось Декарту ясным, отчетливым, самоочевидным, в действительности было одним лишь заблуждением. Так, например, Декарт считал, что утверждение о том, что бог суще-

ствует, а душа независима от тела, столь же ясно и отчетливо, столь же очевидно, как геометрические доказательства. Возражая тем, которые резонно утверждали, что и те представления, которые не вызывают каких бы то ни было сомнений вследствие своей ясности и отчетливости, могут оказаться заблуждением, Декарт прибегал к аргументам из арсенала схоластики: бог не может быть обманщиком. Пытаясь найти объективную опору для своего субъективного критерия истины, Декарт утверждал, что этот критерий „имеет силу только вследствие того, что бог существует и является совершенным существом. . .“ (37).

Однако не одни лишь идеалистические аргументы являются опорой Декарта. Важнейшим аргументом, на который он ссылается, является математическая аксиоматика и дедукция. Математика издавна привлекала Декарта „верностью и очевидностью своих рассуждений“, он убежден, что „среди всех искавших истину в науках только математикам удалось найти некоторые доказательства“ (23). С этой точки зрения аксиома, говорящая о том, что целое больше части, не требует доказательства вследствие своей ясности, отчетливости, самоочевидности. Декарт не пытается вскрыть источник этих неотъемлемых, по его мнению, признаков истины. Математическая аксиоматика, так же как и мышление, рассматривается изолированно от практики. Известно, что тайна аксиоматической самоочевидности была раскрыта лишь диалектическим материализмом. Ленин писал: „ . . . практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, *дабы* эти фигуры *могли* получить значение *аксиом*“.[1]

Декарт считает математический метод универсальным, одинаково применимым во всех областях познания. И в этом, конечно, сказывается ограниченность понимания и предмета, и метода познания. Однако в то время эта ограниченность

[1] В. И. Ленин. Философские тетради. 1947, стр. 164.

имела свое историческое оправдание, она отражала задачи механистического естествознания, для которого математика являлась важнейшей теоретической опорой. Еще Галилей ставил вопрос о том, что математика является не только определенной областью знаний, но и могущественным средством изощрения познавательных способностей. Декарт продолжает здесь бесспорно прогрессивную традицию, он противопоставляет математические доказательства всем другим, в особенности схоластическим, теологическим и т. д. Математика рассматривается Декартом как прямое и непосредственное выражение могущества разума, познания.

Основными моментами рационалистического метода Декарта являются интуиция и дедукция. Интуиция оказывается, по Декарту, разумным постижением аксиоматически очевидного, ясного и отчетливого в познании. В качестве примера интуитивного постижения истины Декарт приводит такие аксиомы, как то, что треугольник ограничен тремя линиями, а шар имеет лишь одну поверхность. „Под *интуицией*, — говорит Декарт, — я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим...“.[1]

Совершенно несомненно, что картезианская интуиция является столь же несостоятельной, как и картезианский критерий истины. Но столь же несомненно, что она вкорне враждебна схоластическому пониманию интуиции как мистического откровения, алогичного по своему характеру. Она прямо и непосредственно направлена против схоластической силлогистики, нанизывающей одно понятие на другое, затемняющей их смысл, доказывающей то, что противоречит всякой логике, всякому опыту. Отсюда понятна лживость утверждений современных интуитивистов, ссылающихся для подтверждения своих ирра-

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 86.

ционалистических концепций на Декарта. В действительности современные интуитивисты возвращаются не к Декарту, а к средневековому алогизму, который противопоставлял интуицию разуму, претендуя на сверхразумное знание. Указывая на исторически прогрессивную тенденцию в понимании интуиции у Декарта, а также у Спинозы и Локка, следует все же иметь в виду, что это понимание выражало беспомощность философии того времени в решении проблемы критерия истины, оно означало по существу отступление от материалистического требования привести понятия в соответствие с объективной реальностью в сторону идеализма.

Если Бэкон выдвигал на первый план индукцию как метод экспериментального естествознания, то Декарт, исходивший из данных математики, в особенности геометрии, подчеркивал значение дедукции, истолковывая последнюю в антисхоластическом духе. Сущность дедукции Декарт сводил к разделению сложного на простые составные части, каждая из которых рассматривалась им как нечто общее многим сложным телам, как то общее, из которого должно быть выведено особенное и единичное. Таким образом, дедукция, по Декарту, необходима для анализа, составляющего, по его мнению, путь к постижению истины. Соответственно этому Декарт формулирует и остальные три правила своего метода:

„*Второе:* делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

„*Третье:* руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

„*И последнее*: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено“ (22—23).

Различие между простым и сложным устанавливается Декартом в соответствии с его учением об истине: он называет простым лишь то, что познается ясно и отчетливо. Такими простыми частями существующих сложных тел Декарт считает фигуру, протяжение, движение и т. п. Следовательно, каждый объект познания должен быть сведен к этим простым частям. Целое, полагал Декарт, может быть познано по составляющим его частям. Познание должно восходить от более простого, общего, известного, к сложному, частному, еще неизвестному. Главный секрет метода, излагаемого Декартом, заключается, по его же словам, в том, что „все вещи можно разбить по определенным классам",[1] классифицировать и благодаря этому познавать.

Диалектика целого и части остается вне поля зрения Декарта. Как и Бэкон, он видит путь познания в сведении сложного к простому. Но если Бэкон понимал под простым элементарные, первичные качества и формы, то Декарт в соответствии со своей количественной концепцией, доводящей до предела механистицизм, лишь намечавшийся у его предшественника, считает этим простым фигуру, протяжение, перемещение тела в пространстве.

Выдвигая на первый план дедукцию, Декарт не отрицает значения индукции, хотя и считает ее второстепенным приемом исследования. Последняя как раз и предполагается четвертым правилом его метода. Поэтому, определяя индукцию, Декарт характеризует ее как „столь тщательное и точное исследование всего относящегося к тому или иному вопросу, что с помощью ее мы можем с достоверностью и очевидностью утверждать: мы ничего не упустили в нем по нашему недосмотру".[2]

Таковы основные особенности картезианского метода, теоретически обобщившего приемы исследования, свойственные естествознанию его времени.

---

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 96.

[2] Там же, стр. 102.

Метод Декарта сугубо рационалистичен. Так, разум определяется Декартом как способность к ясному и отчетливому, т. е. истинному, представлению о предметах. Разум не способен ошибаться,— вот главный вывод, характеризующий рационализм Декарта. „Откуда же, — спрашивает Декарт, — рождаются мои заблуждения? Очевидно, только из того, что воля, будучи более обширной, чем ум (entendement), не удерживается мной в границах, но распространяется также на вещи, которые я не постигаю“.[1] Свободная воля, эта средневековая химера, необходима Декарту не для объяснения первородного греха человека и т. п., а для возвеличения разума. Воля избирает вместо истины заблуждение, подобно тому как она может выбрать зло вместо добра.

Рационализм, как известно, считает источником познания объективного мира не ощущения, а сам разум, непосредственно не отражающий явлений в их конкретной единичности. Однако рационализм Декарта отличается высокой оценкой чувственных данных, поскольку речь идет о познании природы. Но если, по мнению Декарта, разум не способен ошибаться, то чувства, воображение и память хотя и служат познанию, но могут и ошибаться. Поэтому их следует, по Декарту, относить к вспомогательным средствам познания. Тем не менее значение их, по признанию самого Декарта, весьма велико в деле опытного познания природы. Потому-то Декарт полагает, что после установления „начал и первопричин“ дальнейшее познание может носить лишь опытный, чувственный характер: „...впредь я смогу продвигаться в познании природы в соответствии с возможностью производить много или мало опытов“ (57). С этим же связана высокая оценка познавательного значения зрительного восприятия внешнего мира. В „Диоптрике“ Декарт утверждает относительно зрения, что изобретения, служащие для усиления его мощи, являются наиболее полезными из всех остальных.

---

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 376.

Таковы главные положения философского учения Декарта.

В 1946 г. мировая общественность отметила 350 лет со дня рождения Ренэ Декарта. В 1950 г. исполнилось 300 лет со дня смерти этого великого мужа науки. Буржуазные философы, вынужденные высказаться о Декарте в связи с этими памятными датами, сделали все возможное, чтобы исказить действительный облик гениального мыслителя, используя для этого идеалистическую метафизику Декарта, служившую уже в XVII в. основой для реакционных выводов Мальбранша и других идеалистов. „Декарт, — заявил французский профессор А. Койр, — был глубоко и искренне религиозный ум".[1] Неудивительно поэтому, что американский университет в Буффало поспешил перевести книжку этого профессора на английский язык. Профессор Сорбонны Ж. Лапорт посвятил Декарту две книги, в которых доказывается, что он был в основном правоверным католиком, стремившимся следовать за Фомой Аквинатом. Борьба Декарта против схоластики, громадный шаг вперед, сделанный им от средневековья к новому времени, совершенно игнорируются. „Был ли Декарт рационалистом?" — вопрошает Лапорт в своей книге „Рационализм Декарта", опубликованной в 1945 г. Само собой разумеется, что на этот вопрос дается отрицательный ответ, и основоположник рационализма выдается за средневекового иррационалиста. В том же духе рассуждает в своей, посвященной Декарту, книге и П. Дюпон, утверждающий, что волна спиритуализма, поднявшаяся во французской буржуазной философии в начале XX в., наглядно свидетельствует о непреходящем значении философии Декарта, являющегося, по мнению этого фальсификатора истории, „интегральным католиком".

О спиритуализме Декарта много и нудно рассуждает Ж. Шевалье в своей увенчанной премией и неоднократно переиздававшейся книге „Декарт". Этот философствующий

[1] Descartes after three hundred years by Alexandre Koyre. The University of Buffalo studies, v. 19, No 1, March. 1951, p. 27.

мракобес утверждает, что спиритуализм является специфической чертой французской нации, умалчивая о том, что именно Франция дала миру блестящую плеяду выдающихся материалистов. Мистифицированный Декарт объявляется воплощением спиритуализма. „Но это, — заявляет Шевалье, — не немецкий туманный, заумный спиритуализм, это французский, полный здравого смысла, тесно связанный с фактами, реалистический, вытекающий из повседневного эмпирического опыта нормальных людей... спиритуализм".

Не трудно понять, за что награждена книга Шевалье: она несомненно является своеобразным шедевром в области философского шарлатанства.

Глава французских экзистенсиалистов Ж. П. Сартр превращает Декарта в экзистенсиалиста, лидер неотомистов Жильсон объявляет Декарта родоначальником неосхоластики, американские персоналисты находят у него теологическое обоснование индивидуализма. „Основатель рационализма выдается теперь за мистика",[1] — правильно отмечает французский марксист Анри Лефевр. Все это свидетельствует лишь об идейном распаде современной буржуазной философии. Этот маразм одинаково проявляется и в неуклюжих попытках дипломированных лакеев церкви выдать Декарта за своего единомышленника, и в откровенных заявлениях таких философствующих реакционеров, как Ж. Маритэн или А. Боннар, которые объявляют учение Декарта национальным несчастьем и предлагают выбросить его за борт.

Дело, конечно, не в том, восхваляют или хулят Декарта философские прислужники современной буржуазии. И в том, и другом случае обнаруживается одно и то же: действительный, исторический Декарт совершенно чужд и даже враждебен империалистической буржуазии.

Товарищ Сталин в своем историческом выступлении на XIX съезде партии говорил: „Раньше буржуазия позволяла

---

[1] Descartes par Henri Lefebvre. Paris, 1947, стр. 9.

себе либеральничать, отстаивала буржуазно-демократические свободы и тем создавала себе популярность в народе. Теперь от либерализма не осталось и следа. Нет больше так называемой «свободы личности», — права личности признаются теперь только за теми, у которых есть капитал, а все прочие граждане считаются сырым человеческим материалом, пригодным лишь для эксплуатации. Растоптан принцип равноправия людей и наций, он заменен принципом полноправия эксплуататорского меньшинства и бесправия эксплуатируемого большинства граждан. Знамя буржуазно-демократических свобод выброшено за борт".[1]

Давно прошли те времена, когда буржуазия, борясь против феодализма, провозглашала своим знаменем разум и истину, выступала против духовной диктатуры церкви, освобождая науку и философию от клерикального гнета. Современная буржуазия возрождает все средневековое, превозносит все отживающее и под стягом антиинтеллектуализма и алогизма выступает против развития, объявляя нормальным состоянием покой, неизменность, раболепие перед прошлым, смирение, неверие в будущее и т. д.

Декарт провозглашал стремление к истине высшим назначением человека, а нынешние буржуазные философы утверждают, что следует возвыситься над истиной и заблуждением, ибо истина лишь условность, грамматическая форма, выгодное предположение.

Декарт не сомневался в познаваемости мира, он возвышал человеческий разум, в то время как современные философствующие мракобесы всячески тщатся доказать, что познание мира невозможно, не нужно и даже опасно, а специфической особенностью разума является фатальное стремление к иллюзиям.

Французские коммунисты, основываясь на указаниях Маркса, Энгельса, Ленина, Сталина, успешно разоблачают буржуазную

[1] И. В. Сталин. Речь на XIX съезде партии. Госполитиздат, 1952, стр. 11—12.

фальсификацию учения Декарта, доказывая, что прогрессивные идеи этого мыслителя и связанные с ним научные традиции уже неприемлемы для буржуазии, ставшей на путь империалистической реакции. Когда-то Декарт писал: „Я отношусь к числу тех, кто больше всего любит жизнь". Но современная буржуазия, проникнутая человеконенавистнической идеологией, ненавидит все живое, развивающееся, устремленное в будущее, полное оптимистической веры в неисчерпаемые силы жизни. Не случайно поэтому, что прогрессивные идеи Декарта ныне служат оружием в борьбе передовых сил против империалистической реакции.

Т. И. Ойзерман.

ДЕКАРТ И ОПТИКА XVII ВЕКА

Декарту-философу посвящена огромная литература, и можно без преувеличения сказать, что Декарт-философ почти полностью затмил Декарта-математика, о котором вспоминают только как о создателе аналитической геометрии, и совсем затмил Декарта-физика, про которого д'Аламбер через сто лет после его смерти писал: „Его физика совершенно забыта, и вихри, составляющие ее основание, стали почти смешными". При этом он добавил, что главная заслуга Декарта заключается в том, что он сформулировал метод сомнения и дал пример его применения, отбросив ярмо схоластики. „Однако он заменил его детской игрушкой, пригодной лишь для потехи ума, а не для его удовлетворения".

Впрочем, следует отметить, что приведенное мнение д'Аламбера, хотя оно и было разделено большинством ученых той эпохи, впоследствии потерпело значительные изменения. Естественно, что неудачи картезианской физики, — а именно: неправильность положения о мгновенном распространении света, неверные законы ударов двух тел, справедливые нападки Лейбница на декартовы формулы сохранения движения, а также Ньютона на вихри, — давали противникам картезианства сильнейшие аргументы против Декарта; к ним присоединился и Вольтер, высмеивавший в своих сатирических произведениях основные положения картезианцев. Физика Ньютона, опирающаяся на опыт, не признаю-

щая гипотез (по крайней мере, в принципе) победила и отодвинула декартову физику на задний план.

Однако в конце XVIII в. произошел очередной поворот в развитии физики. Богатый физический опыт, накопленный в XVII и XVIII ст. последователями Ньютона, а также учениками и последователями Декарта — Рого и особенно Мариоттом, сумевшими отойти от ошибок учителя, сохранив его метод, и, наконец, Мальбраншем, заменившим картезианскую гипотезу бесконечно жесткого эфира более гибкой теорией упругого эфира и построившего некоторое подобие волновой теории света, — требовал теоретической разработки. С этой целью можно было у Декарта заимствовать его учение, которое в значительной степени послужило началом новой ветви физики, а именно — теоретической физики.

Многие идеи Декарта, подвергнувшиеся впоследствии тем или другим изменениям, в усовершенствованном виде нашли применение в различных областях физики; даже его вихри при соответствующем изменении могли бы быть использованы в качестве силовых линий.

Развитию идей Декарта благоприятствовала обстановка всеобщей революции в исследовании природы.

Энгельс в „Диалектике природы“ пишет: „Коперник бросил — хотя и робко и, так сказать, лишь на смертном одре — вызов церковному авторитету в вопросах природы. Отсюда начинает свое летосчисление освобождение естествознания от теологии, хотя выяснение между ними отдельных взаимных претензий затянулось до наших дней и в иных головах далеко еще не завершилось даже и теперь. Но с этого времени пошло гигантскими шагами также и развитие наук...“.[1]

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1952, стр. 5.

В этом движении вперед Энгельс признавал большие заслуги Декарта, указывая, что у него можно найти некоторые основные идеи современной философии и физики.

„Неуничтожимость движения, — говорит Энгельс, — выражена в положении *Декарта*, что *во вселенной сохраняется всегда одно и то же количество движения*“.[1]

В том же произведении Энгельс пишет: „Когда механическая теория теплоты привела новые доказательства в подтверждение положения о сохранении энергии и снова выдвинула его на передний план, то это несомненно было огромным ее успехом; но могло ли бы это положение фигурировать в качестве чего-то столь абсолютно нового, если бы господа физики вспомнили, что оно было выдвинуто уже Декартом?“.[2]

Любопытно, что главный интерес возбуждали именно те отделы физики Декарта, которые содержат наибольшее число ошибок: общие взгляды на мир, космогония, механика... Оптика же — наиболее ценный вклад Декарта в физику — осталась в стороне, и мало кто вспоминает великого философа и физика при изложении вопросов оптики, лишь теорию радуги и закон преломления связывают с именем Декарта. В связи с этим интересно отметить следующее место из „Диалектики природы“, где Энгельс упоминает о работе Декарта по оптике: „*Декарт* открыл, что приливы и отливы вызываются притяжением луны. Он же одновременно со Снеллиусом открыл основной закон преломления света, притом формулировал его по-своему, отлично от Снеллиуса“.[3]

Следует отметить, что в то время, когда ряд ученых, преимущественно голландцев, обвинял Декарта в научном плагиате, Энгельс занял правильную позицию в знаменитом

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1952, стр. 195.

[2] Там же, стр. 23.

[3] Там же, стр. 223.

споре о приоритете открытия закона преломления. К этому вопросу мы еще вернемся несколько позже.

Как упоминалось выше, в конце XVII и начале XVIII столетия казалось, что слава Декарта окончательно померкла, и картезианство было повержено в прах восходящей звездой Ньютона. Но именно тогда произошел поворот в пользу Декарта.

Немалую роль в этом повороте сыграл и наш великий Ломоносов.

„Славный и первый из новых философов Картезий осмелился Аристотелеву философию опровергнуть и учить по своему мнению и вымыслу, — пишет Ломоносов в предисловии к переводу „Вольфианской экспериментальной физики". — Мы, кроме других его заслуг, особливо за то благодарны, что тем ученых людей ободрил против Аристотеля, против себя самого и против прочих философов в правде спорить, и тем самым открыл дорогу к вольному философствованию и к вящему наук приращению".[1]

Ломоносов для ряда своих работ использовал некоторые положения Декарта. Это совершенно понятно, ибо для того времени метод Декарта был наиболее прогрессивным, картезинская физика строилась в духе материализма, хотя и механистического.

В своей речи „Слово о происхождении света, новую теорию о цветах составляющую" (1 VI 1756) Ломоносов решительно стал опять на сторону Декарта, отвергнув доводы и возражения Ньютона, точнее — его последователей. Громадную роль Декарта в борьбе со схоластикой путем изучения самой природы отметил Лобачевский в речи „О важнейших предметах воспитания" (5 VII 1828): „Математики открыли прямые средства к приобретению познаний. Еще не с давнего времени пользуемся мы этими средствами. Их указал нам великий Бэкон. «Оставьте, — говорил он, — трудиться напрасно, стараясь извлечь из разума всю мудрость;

[1] М. В. Ломоносов, Полн. собр. соч., т. I, Изд. АН СССР, 1950, стр. 423.

спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно». Наконец, гений Декарта произвел эту счастливую перемену, и благодаря его дарованиям мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики ходит по университетам".

Из всех произведений Декарта наибольший интерес с точки зрения точных наук представляет „Рассуждение о методе", содержащее его основные работы по оптике, метеорологии и математике, с изложением метода „отыскивания истины в науках". „Рассуждение о методе" интересно еще тем, что является основным и почти исключительным источником сведений о жизни (в особенности о юношеских годах) Декарта.

„Рассуждение о методе" — первое по времени публикации произведение Декарта, но далеко не первая проба пера. Наоборот, его автор к моменту составления этой книги успел накопить значительный материал, особенно по геометрии и оптике, и у него лежала большая рукопись, не сданная в печать вследствие причин, о которых мы расскажем ниже.

Какова была цель Декарта при написании этой книги? Чтобы уяснить ее, необходимо обратиться к юношеским годам будущего философа, так как уже тогда у него родилась мысль о полном переустройстве всех наук, которая продолжала непрерывно развиваться по мере того, как увеличивались его знания и опыт. Вместе с тем мы постараемся показать, почему в качестве приложений своего метода Декарт избрал диоптрику, науку о метеорах (частично относящуюся теперь к метеорологии) и геометрию.

Ренэ Декарт родился 31 марта 1596 г. в Ля-Эй, — маленьком городке на границе между французскими провинциями Турен и Пуату. Его отец, Иоахим Декарт, мелкопоместный дворянин и советник парламента в Бретани, поместил своего сына в коллегию (гимназию) в городе Ля-Флеш, только что организованную иезуитами и впоследствии получившую репутацию наилучшего иезуитского учебного заведения Франции. Ренэ тогда было восемь лет. По собственному признанию, впрочем

заслуживающему мало доверия, так как он считал себя обязанным проявлять во всех случаях жизни скромность, не всегда искреннюю, он ничем не выделялся среди своих сверстников. Однако в более поздние годы, как он сам об этом подробно повествует в „Рассуждении“ (см. гл. I), овладев элементами наук, литературы и философии настолько, насколько позволяли его исключительные способности, хорошая школьная подготовка и самостоятельное образование, явившееся результатом чтения большого числа книг по разнообразным областям знаний, он разочаровался во всем том, что изучал. Ни в одной из известных ему наук он не мог найти истины. По его мнению, даже математические построения, с которыми ему пришлось встречаться, не лишены были логических ошибок.

Естественно, что у Декарта появилась мысль о пересмотре всех наук, для чего необходимо было в первую очередь найти метод, согласно которому могла быть осуществлена их перестройка. Первые идеи о методе появились у Декарта, когда он сидел еще на школьной скамье; тогда же постепенно развивались его наклонности: сначала к точным наукам, в особенности к геометрии, а затем к физике, преимущественно к оптике и космогонии — модным по тому времени вопросам.

Учителя коллегии держали своих воспитанников в курсе последних научных открытий. В 1611 г. (Декарту было пятнадцать лет), в годовщину смерти короля Франции Генриха IV, в коллегии было организовано торжество, на котором был зачитан сонет со следующим заглавием: „На смерть короля Генриха Великого и на открытие нескольких новых планет, или блуждающих звезд, вокруг Юпитера, сделанное в этом году Галилеем, известным математиком великого герцога флорентийского“.

Зрительные трубы, только что появившиеся, в то время, продавались в лавках на мосту близ собора Парижской богоматери. Все восхищались новыми небесными светилами, открытыми Галилеем с помощью этих зрительных труб и

названными им „светилами Медичи". Даже в Риме учитель философии иезуитской коллегии давал своим воспитанникам в числе тем для сочинений и темы о новых открытиях. Мало кто мог тогда предвидеть последствия, которые возникли в результате открытий Галилея, и оказались столь пагубными для могущества и авторитета церкви.

Эти замечательные события — появление зрительных труб и открытия новых светил на небе — не могли не оставить глубоких следов в жадно воспринимавшем все новое молодом воспитаннике и в скором времени сказались в его первых философских работах и обнаружились в его письмах к Мерсенну и другим. В частности, тот интерес, который возбудили зрительные трубы — таинственные приборы, открытые благодаря случайности, действие которых в значительной степени оставалось еще невыясненным, — нашел свое отражение в письме к Ферриэ от 13 ноября 1629 г.[1] Этот интерес не ослабевал и в дальнейшем: именно он послужил стимулом к сочинению „Диоптрики". Открытые Галилеем вращение спутников Юпитера вокруг планеты и фазы Венеры, наглядно подтвердившие правильность учения Коперника, произвели на Декарта громадное впечатление и сделали его убежденным сторонником Коперника, каким он остался до конца своей жизни, хотя принужден был скрывать это после драматических событий 1633 г. (осуждение Галилея). Свои взгляды на вселенную Декарт изложил в „Трактате о свете" (по первому замыслу — „Мир"), который он начал писать в 1622 г.

Окончив коллегию в 1612 г., Декарт, как можно предполагать, судя по косвенным данным, занялся самообразованием; однако об этом периоде жизни Декарта почти ничего не известно. Сам Декарт писал о себе, что к концу 1619 г. он создал научный метод, а также правила поведе-

---

[1] Всю переписку Декарта см. в „Correspondance", опубликованной Ш. Адамом и Г. Мильо (тт. I—IV, Париж, 1936—1947).

РЕНЕ ДЕКАРТ

С эскиза Франса Гальса (Киев, Музей западного и восточного искусства).

ния. Что касается его принципов философии и физики, то они у него постепенно развивались и окончательно сформировались лишь девять лет спустя, а именно около 1628 г. Об этом свидетельствует „Рассуждение о методе“.

В 1617 г. Декарт уехал в Голландию и оттуда в качестве вольнонаемного офицера отправился в путешествие по Европе, во время которого он заводил знакомство с учеными тех стран, где ему доводилось побывать. В частности, около 1619 г. он посетил в Ульме известного математика Фаульбахера, с которым он имел несколько бесед на математические темы, произведших на него сильное впечатление и оказавших определенное влияние на его первые работы по геометрии. Тогда же у него возникла идея о новой математической науке, более общей, охватывающей все существующие отдельные математические дисциплины как частные случаи или приложения. Впрочем, его подлинные намерения остались неясными; однако известно, что десятилетие, последовавшее за посещением Фаульбахера, было посвящено работе по математике, а также поискам методики построения наук. У нас нет сведений, свидетельствующих о том, что Декарт в эти годы сколько-нибудь интенсивно занимался физикой, хотя он, вероятно, не забывал о зрительных трубах. Как раз в это время появилась книга Мерсенна „Questiones celeberrimae in Genesim“, в которой последний затрагивает самые различные вопросы. В ней была помещена заметка о работах по оптике любителя-оптика, а по профессии казначея — Клавдия Мидоржа, парижского сенатора, занимавшегося преимущественно катоптрикой, т. е. отражательными зеркалами, которым он придавал параболическую форму. Нам не известно, какого качества были эти зеркала; по всей вероятности плохого, ибо они не нашли применения, — в противном случае весть об употреблении этих отражательных зеркал дошла бы до нас; кроме того, мы знаем, что до Ньютона никому не удавалось изготовить хороших зеркал, главным образом потому, что еще не был найден подходя-

щий для них материал. Во всяком случае выбор формы зеркала, а именно параболической, делает честь Мидоржу, так как эта форма действительно приводит к наилучшим результатам, если только зеркало предназначалось для рассматривания далеких предметов. Декарт же был сторонником гиперболических поверхностей, что, впрочем, тоже было правильно, если имелось в виду исправление сферической аберрации линз, а это был как раз тот вопрос, которым интересовался Декарт.

Интерес Декарта к оптике носил не только теоретический характер. Он сообщил о своем изобретении, касающемся оптических поверхностей, опытному мастеру-оптику Ферриэ, убедив его в пользе специальных шлифовальных машин. Эта беседа нашла отражение в письме Пейреска (Пейресциус), адресованном 8 января 1628 г. его приятелю Дюпюи, в котором первый перечисляет инструменты, оставленные неким просвещенным любителем наук Алльомом, и среди них машину, изготовленную для него Ферриэ и описывающую кривую, необходимую для вогнутых поверхностей линз и зеркал. Немного спустя Декарт пригласил к себе в Голландию Ферриэ с тем, чтобы иметь возможность наблюдать за его работой; он завел знакомство с инженером Этьенном Вильбрессие, с которым проделал эксперименты по оптике; он изучал преломление света вместе с Мидоржем, беседовал с астрономом Мореном (будущим противником Коперника).

После двукратного непродолжительного пребывания в Голландии (в 1619 и 1621 гг.) Декарт в 1628 г. переехал туда на более продолжительный срок. Обычно считают, что причиной его отъезда из Франции послужило желание поселиться в более свободной стране, где он мог бы спокойно излагать свои мысли, без страха подвергнуться преследованиям и репрессиям со стороны иезуитской реакции. С юных лет Декарт придавал большое значение знакомству с учеными: возможно, с целью собирания материала для своего „Рассуждения

о методе", возможно, для обмена мыслями по поводу философских и научных вопросов. Голландия, молодая, сильная, быстро развивающаяся страна, только что опередившая Испанию и завоевавшая первенство в Европе, лихорадочно строила новые университеты, академии. Научная жизнь кипела, и если крупных голландских ученых было еще не так много, то можно было ожидать, что их число быстро возрастет.

Декарт сразу заводит знакомство с двумя врачами (он с ранних лет увлекался анатомией и медициной), с математиком Гортензием, бывшим учеником Снеллиуса (заметим, что Декарту уже более двух лет был известен закон преломления), с математиком Гоолем, с которым впоследствии он очень подружился, с семьей Скаутен, состоящей в основном из математиков, и многими учеными других специальностей. Упомянем еще о знакомстве с секретарем принца Оранжского — Константином Гюйгенсом, известным писателем и поэтом, любителем научных диковинок, особенно в области оптики и гидравлики. Отметим, что второй из его пятерых детей, маленький Христиан, выделялся своими способностями к математике, и Декарт предсказал ему большое будущее.

Декарт вел в Голландии тихую, уединенную жизнь, работая с утра до вечера, лишь изредка посещая своих друзей.

В результате многолетних философских размышлений Декарт за девять месяцев пребывания в Голландии написал „Маленький трактат по метафизике". В этом трактате Декарт, повторяя традиционную схоластическую аргументацию о бессмертии души, прежде всего доказывает существование бога, причем с помощью новых аргументов, имеющих много общего с теми, которыми пользовались его современники-атеисты для доказательства противоположного тезиса. Главные положения этого трактата заключались в том, что бог создал мир, притом единственный; в те годы Декарт еще не разделял смелых взглядов Джордано Бруно на множественность миров, но вскоре к ним присоединился. По Декарту,

в реальном мире все может быть сведено к трем категориям: к пространству, форме и движению. Помимо этих трех категорий, свойственных неодушевленным предметам, существует еще душа, которой наделены люди и только люди, в отличие от животных, представляющих собою усовершенствованные механизмы — автоматы.

Таким образом, Декарт считал, что внешний мир может быть описан с помощью чисто математических понятий: пространства, формы и движения. Отсюда следует, что все науки, которые в настоящее время принято называть точными, могут быть выведены из математики. В частности, физика, которая в то время под влиянием Леонардо да Винчи, Галилея, Бэкона начала быстро развиваться, должна была стать простым приложением математики. К этому стремился также и Декарт, и в этом основная цель его метафизики. Метафизику он считал частью философии — основы всех наук.

Естественно, что Декарт должен был приступить к осуществлению своей идеи. Он постепенно накапливал материал, подтверждающий его взгляды. Что касается математики, то таким материалом служил ряд его крупных работ по геометрии; но основным полем применения его идей должна была стать физика, которой он, в сущности, до тех пор мало занимался.

20 марта 1629 г. наблюдалось весьма редкое и эффектное явление природы, а именно — паргелий, т. е. образование нескольких солнц на небе. Это явление описал астроном иезуит Шейнер (будущий враг Галилея). Приятель Декарта — математик Ренери, узнав от Гассенди (или правильнее Гассенд, как себя называл уроженец южной Франции, один из крупнейших физиков той эпохи, открывший путь к признанию учения Коперника во Франции) об описании Шейнера, сообщил об этом Декарту и предложил ему принять участие в объяснении явления, природа которого в то время была неизвестной. Не удовлетворяясь частными решениями, Декарт

решил изучить вопрос о метеорах во всей его полноте и заодно дать новое построение физики, согласно своим воззрениям. Весь этот материал мог составить основу большого трактата о мире. Поскольку такое заглавие звучало слишком высокопарно, он придумал более скромное название — „Трактат о свете", которое должно было заинтересовать просвещенных людей и ученых и позволить рассмотреть любые вопросы физики.

„Трактат о свете" был опубликован (в незаконченном виде) лишь после смерти Декарта. На нем следует остановиться, так как этот трактат многое объясняет из того, что вошло позже в „Рассуждение о методе".

Все важнейшие сведения об этой книге можно получить из переписки Декарта, в особенности с Мерсенном. Кроме того, в „Рассуждении о методе" содержится краткое резюме трактата; более полное, хотя также сокращенное, изложение приведено в „Началах философии".

Декарт принялся за работу в начале 1630 г. Прежде всего он начал борьбу с мнением, распространенным среди большинства людей, заключающимся в том, что внешние предметы тождественны тем впечатлениям, которые они создают у нас: многие представляют себе, что рассматриваемый предмет на самом деле имеет тот цвет, тот запах и т. д., которые дают ощущения; в действительности эти ощущения, по Декарту, вызываются различными свойствами ощущаемых предметов, например более или менее быстрым вращением частиц, создающим ощущение цвета.

Такую же ошибку, по мнению Декарта, делают и ученые, но ее труднее обнаружить под философской терминологией. Так называемые „действительные качества", „субстанциональные формы", которыми пользовались философы — современники Декарта, представляют собой лишь ощущения, которые мы испытываем, переносим наружу и приписываем внешним предметам. Схоластическая философия лишь переводит на

свой наукообразный язык эти ошибочные представления и должна разделить их судьбу.

К этому вопросу Декарт возвращается и в „Рассуждении о методе". Однако он не мог перейти к предложенной им математической физике до тех пор, пока в неодушевленной природе оставалось что-нибудь еще помимо установленных им чисто математических понятий, а именно: пространства, формы и движения. Материя у него отождествляется с пространством. Материя — это протяженность, и, наоборот, пространство заполнено материей.

Отсюда вытекает, что пустоты не может быть: там, где есть пустота, нет пространства; с другой стороны, отсутствие пустоты подтверждается опытом, по идее совпадающим с знаменитым опытом Торричелли с винной бочкой, которая не опорожняется до тех пор, пока второе отверстие остается закрытым. Таким образом, Декарт не признает пустоты точно так же, как и его современники; боязнь пустоты Декарт заменяет принципиальным отрицанием ее.

Вместо отживших, подлежавших забвению и уничтожению, категорий качества и субстанциональных форм Декарт ввел категорию движения материальных частиц, с помощью которой он получил возможность объяснять природу теплоты и света, отделить твердые тела от жидких и газообразных. С особой силой он выступает против понятия „качества"; с этой целью он специально подбирает и выписывает из Парижа с помощью Мерсенна необходимый ему литературный материал.

Первые пять глав „Трактата" заполнены общими соображениями. Далее начинается изложение космогонической теории Декарта. Эта теория не получила такой известности, как теория происхождения миров Канта, хотя по своей оригинальности и смелости она нисколько не уступает последней. Декарт строил ее в то время, когда церковь, с опозданием понявшая опасность, возникшую для нее в связи с распространением учения Коперника, особенно после того, как Галилей стал приводить убедительные доказательства

вращения земли, начала преследовать сторонников теории Коперника.

Осторожный Декарт прибег к способу, который формально спасал его от возможных обвинений в ереси и вместе с тем никого не вводил в заблуждение. Сам Декарт пишет по этому поводу в письме к Мерсенну следующее: „Я должен... рассмотреть тысячи различных вещей для того, чтобы способ, с помощью которого я мог бы выразить истину, не поражал бы ничьего воображения и не противоречил общепринятым мнениям“ („Correspondance“, т. I, стр. 194). Он измышляет особый мир, отличный от реального, называя его „мир моего сочинения“ (fable de mon monde); все космогонические теории, которые далее будут изложены, относятся только к вымышленному миру. Этот мир подчиняется нескольким непременным законам, установленным богом, — в частности, законам движения.

Основное свойство декартова условного мира заключается в том, что в нем не может быть чудес: бог все создал раз и навсегда, а в дальнейшем сохраняет лишь то, что создал; другими словами, он не вмешивается в ход событий и установленные им же законы не изменяет. Никакого сверхъестественного вмешательства быть не может. Эта концепция, с точки зрения ее последствий, не отличается по существу от тезиса, принятого атеистами более поздней эпохи. По этому поводу Паскаль высказался так: „Я не могу простить Декарту следующего: во всей философии он охотно бы обошелся без бога, но не мог удержаться, чтоб не дать ему щелчка по носу, заставив его привести мир в движение. После этого он более уже никаких дел с богом не имел“.[1]

Более того, его космогоническая теория, согласно которой материя, заполняющая пространство, вращаясь по окружностям и образуя знаменитые декартовы вихри, сгущается в звезды, не препятствует тому, чтобы в безграничном про-

[1] Penseés, I Art X, 41

странстве Декарта не оказалось других миров, аналогичных нашему. Хотя это „еретическое“ положение в явном виде не высказано,[1] тем не менее его возможность не отрицается, и оно напрашивается само собой.

Чтобы у читателя не возникало сомнений относительно того, что автор понимает под выражением „мир моего сочинения“, он обозначает вымышленные планеты, описываемые им, теми же астрономическими символами — ☿, ♀, ♂, ♃, ♄ и т. д., которыми принято обозначать планеты солнечной системы; для большего сходства он приписывает этим планетам спутников, аналогичных Луне и только что открытым спутникам Юпитера. Впрочем, прием Декарта никого не обманывал, в особенности его противников. Иезуит Даниэль в своем памфлете „Путешествие в мир Декарта“ (1702), направленном против картезианской философии, пишет: „Я плохо понимаю, что это за мир Декарта, в который вы хотите меня ввести. Читая Декарта, я полагал, что его мир есть не что иное, как мир, в котором мы живем, но объясненный согласно философским принципам. Я ясно помню слова Декарта в одном из его писем, что он «счел бы себя ничего не знающим в физике, если бы представлял лишь природу вещей и не умел показать, что иной она быть не может». Я воспринял эти слова как некоторое хвастовство; однако когда Декарт в другом месте говорит, что не претендует объяснить происходящее в действительном мире и описывает лишь то, что должно происходить в мире, им воображаемом, то я убежден, что он был бы весьма недоволен, если бы ему поверили“.

Действительно, сам Декарт в „Рассуждении о методе“ (см. стр. 40) пишет, что его прием имеет целью свободно высказывать то, что он думает, не тратя времени на опровержение общепринятых среди ученых взглядов.

Космогония заканчивается главами XI и XII „Трактата“, где говорится о тяготении и приливах, объясняемых, согласно Де-

[1] Позже в „Рассуждении о методе“ Декарт прямо говорит о множестве миров.

карту, совместным вращением земли и неба вокруг оси земли, причем небо вращается значительно скорее, нежели земля; это вытекает из космогонической теории вихрей. Вместе с тем ясно, что Декарт разделял мысли Коперника о вращении земли, так же как и многие просвещенные люди той эпохи; однако он вполне отдавал себе отчет в опасности, таящейся в приверженности к этим идеям, и принимал меры к ограждению себя от этой опасности; атмосфера накалялась, и хотя церковь пока ограничивалась преимущественно мерами морального воздействия, чувствовалось приближение нового похода церкви, направленного против коперниковой „ереси". Напомним, что Декарт писал свою космогонию приблизительно в 1631—1632 гг., а Галилей был осужден годом позже, в 1633 г.

Последние три главы — XIII, XIV и XV — посвящены вопросу о свете и находятся в такой тесной связи с „Диоптрикой", что в отношении многих отдельных мест этих глав невозможно сказать, были ли они составлены Декартом до написания „Диоптрики" или после; он повторяет в них то, что уже было опубликовано в последнем произведении; это замечание относится главным образом к первой главе „Диоптрики".

Но вместе с тем в указанных произведениях в изложении вопроса о свете имеется и существенная разница. В „Трактате о свете" Декарт изучает главным образом законы распространения света, идущего от звезд к земным наблюдателям. В XIII главе он излагает законы распространения света, в XIV — перечисляет основные его свойства, а в XV — объясняет, почему „жители планеты, называемой Землей, могут видеть это небо совершенно подобным нашему". Следует помнить что „Земля", описываемая в „Трактате", есть условная „Земля", — не та, на которой мы живем.

В первой главе „Диоптрики" также рассматриваются свойства света, но с другой точки зрения и в более узкой области: автор преследует главным образом цель вывести

закон преломления, для чего ему было достаточно описать „поведение“ света при переходе через границу двух сред.

Взгляды Декарта на природу света представляют большой интерес не только потому, что они свидетельствуют о переломе, происшедшем в физике в эпоху Бруно и Галилея, но еще и потому, что они явились результатом его собственного метода изучения любого научного вопроса.

В законченном виде он изложил основные черты своего метода лишь в 1637 г., но отдельные положения были разработаны им гораздо раньше, — некоторые, как мы видели, уже на школьной скамье. Стремление свести все к пространству (материи) и движению особенно ярко выявляется в его работах о природе света.

Именно в указанных выше главах автор „Трактата о свете“ приводит перечень тех основных свойств света, из которых могут быть выведены вся геометрическая оптика и световая энергетика (фотометрия):

1) свет распространяется во все стороны вокруг светящихся тел;

2) свет распространяется на любое расстояние;

3) распространение света происходит мгновенно;

4) свет распространяется прямолинейно в виде световых лучей;

5) лучи, исходящие из разных точек, могут собираться в одну точку;

6) лучи, исходящие из одной точки, могут расходиться в разные точки;

7) различные лучи могут проходить через одну и ту же точку, не мешая друг другу;

8) если сила лучей весьма различна, они могут мешать друг другу;

9) направление этих лучей может быть изменено при отражении или преломлении;

10) сила лучей может быть увеличена или уменьшена различными свойствами передающей их материи.

Намерение Декарта свести сложнейшее для того времени явление распространения света к небольшому числу простых, наглядных, всем понятных положений, на основании которых средствами только одной математики может быть построена теоретическая и даже прикладная оптика, удалось вполне. В сущности, по истечении трех веков развития оптики этот перечень свойств световых лучей, установленный Декартом, до сих пор лежит в основе геометрической оптики, правда, в несколько более сжатом и сокращенном виде, как об этом свидетельствует большинство изданных за последнее десятилетие учебников по оптике, в которых приводится следующий установившийся перечень четырех основных положений геометрической оптики:

1) в однородной среде свет распространяется по прямым линиям — лучам;

2) на границе двух сред происходит преломление или

3) отражение по определенным законам;

4) лучи распространяются независимо друг от друга.

Естественно, современное изложение более сжато и ясно. По существу, оно отличается от декартова двумя положениями: положением о мгновенном распространении света, навеянным Декарту аналогией с палкой, передающей, по его представлению, любое движение мгновенно, и положением, согласно которому лучи могут мешать друг другу, если их сила неравна. Первое подтверждалось опытами Галилея, пытавшегося определить скорость света,[1] что ему, однако, не удалось, и только в 1675 г. Рёмер впервые установил, что эта скорость конечна.

Вопрос о скорости света имел большое принципиальное значение, и Декарт в одном письме к Бекману (или к Гортензию, — адресат точно не установлен) от 22 августа 1634 г.

---

[1] См. например: „Оптика Ньютона", пер. С. И. Вавилова, М.—Л., 1927, стр. 332 и сб. „Галилео Галилей", статья С. И. Вавилова, 1949, стр. 48.

подробно излагает свое доказательство мгновенности распространения света.

Приводим некоторые места этого письма:

„Я недавно говорил, когда мы были вместе, что свет достигает наших глаз мгновенно; даже прибавил, что это было для меня настолько достоверным, что если бы кто-нибудь доказал мне неправильность этого положения, я готов был бы согласиться с тем, что я ничего не понимаю в философии.

„Вы, наоборот, утверждаете, что свет может распространяться лишь за некоторый промежуток времени; и вы добавляете, что вы придумали опыт, который ясно показал, кто из нас ошибается...“.

Опыт по идее повторяет эксперимент Галилея с качанием факела перед зеркалом, расположенным на большом расстоянии.

„...Я вас поставил в известность о том, что мы располагаем другим опытом, выполненным много раз с высшей тщательностью и вниманием тысячами людей, который с очевидностью показывает, что нет никакого промежутка времени или отставания этого рода между мгновением, когда свет испускается светящимся предметом, и мгновением, когда он входит в наш глаз“.

Декарт совершенно правильно доказывает, что если даже принимать скорость света в десять раз больше, чем та, которая могла бы быть обнаружена в опыте своего корреспондента, то свету нужен был бы промежуток по крайней мере в час, чтобы добираться от Луны до Земли, а при наблюдении лунных затмений этот час был бы давно обнаружен и, — пишет Декарт, — не только час, даже минута, даже полминуты.

Декарт не мог подозревать, что свет распространяется от Луны до Земли за одну с небольшим секунду!

Восьмое положение, согласно которому лучи могут мешать друг другу, если сила лучей неравна, представляет немалый интерес: в самом деле, если лучи „мешают“ друг другу,

то это значит, что они „интерферируют“ друг с другом, как это следует из перевода с латинского языка. Несмотря на то, что интеференция света была впервые осуществлена Юнгом и Френелем в начале XIX столетия опытным путем, сама идея интерференции могла появиться гораздо раньше, так как явление колец Ньютона, основанное на интерференции лучей, наблюдалось и ранее XVII столетия, но не находило объяснения. Как известно, Гримальди, изучая в 1665 г. некоторые диффракционные явления, поставил опыт, по идее напоминающий знаменитый опыт Юнга; хотя опыт и не привел к определенным выводам вследствие ряда причин, на которых не стоит останавливаться, но он показывает, что идея интерференции в современном смысле слова уже не была чуждой передовым ученым XVII столетия. Что касается Декарта, то он не только знал диффракционные явления, но умел их создавать, как об этом свидетельствует его письмо к Мерсенну от января 1630 г., в котором он описывает свои опыты наблюдения пламени свечи через хвост гусиного пера и даже через волос; таким образом, он наблюдал диффракцию, причем в довольно чистом виде. „Что касается этого сияния, которое обычно наблюдается около пламени свечи, — пишет Декарт, — оно не имеет ничего общего с коронами, иногда замечаемыми вокруг светил; оно на самом деле ничем не отделено от пламени и представляет собой не что иное, как дополнительный свет, нечто вроде пучка лучей, проходящих непосредственно через глазной зрачок и распространяющихся так же, как луч солнца, который проникает через малое отверстие в комнату и рассеивается по сторонам. Чтобы увидеть более яркие цвета, потрудитесь рассматривать пламя свечи с семи или восьми шагов через гусиное перо или единственный волос, спускающийся сверху вниз и проходящий через середину вашего глаза, приложив волос вплотную к нему: тогда вы сможете наблюдать большое разнообразие красивых цветов“.

Тем не менее Декарт не понимал природы диффракции, и его „интерференция“ лучей имеет совершенно особый

характер, навеянный неудачной аналогией с ветром. Именно так он объясняет положение 7, не взирая на то, что оно находится в прямом противоречии с положением 8, которое гласит: „если сила лучей весьма различна, они могут мешать друг другу“.

„Чтобы понять, как часть этих лучей, направляясь из одних точек и стремясь к другим, проходит через одну и ту же точку, не мешая друг другу (например подобно тому, как два луча AN и DL на рис. 1 проходят через точку E), следует учесть, что каждая из частиц второго элемента[1] может одновременно подвергнуться нескольким различным импульсам. Благодаря этому частица, находящаяся, например, в точке E, может быть сразу толкаема и по направлению к L (действием, исходящим из области солнца, обозначенной D) и к N (действием, порождаемым областью, обозначенной A). Легко убедиться, что через три трубки FG, HI, KL (рис. 2) можно толкать воздух из F к G, из H к I и из K к L, хотя они и соединены в точке N так, что весь воздух, проходящий через середину каждой из них, должным образом проходит также и через середину обеих других“ („Трактат о свете“).

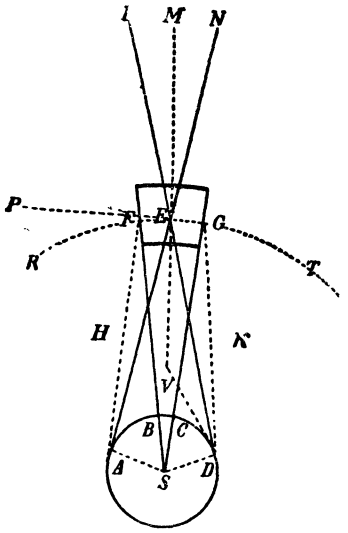

Рис. 1.

Относительно положения 8 Декарт в этом же произведении пишет: „Это же сравнение объясняет, почему сильный свет

[1] Второй элемент, по Декарту, образует „небо“ и состоит из таких же частиц, как и первый, образующий источник света: Солнце или звезды. По воззрениям Декарта, „небо“ вращается вместе со звездой, но гораздо быстрее ее.

препятствует действию более слабого. Если толкать воздух через F значительное сильнее, чем через H или K, то он направится только к G и совершенно не пойдет ни к I, ни к K".

Вероятно, приведенные здесь рассуждения навеяны опытами по распространению света через мутные среды.

Несмотря на то, что объяснения Декарта несовершенны, его принципы, рассеянные там и сям по главам „Трактата о свете", а позже в „Диоптрике", в основном верны, и мы позже увидим, что большинство главных положений фотометрии были известны Декарту; он делал из них абсолютно правильные выводы и в этой области опередил на 100—120 лет физиков своего времени.

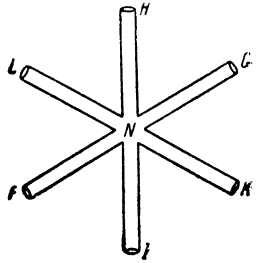

Рис. 2.

Глава XV „Трактата о свете" представляет собой изложение некоторой особой оптики небесных светил; автор решает здесь трудную задачу, заключающуюся в том, чтобы дать ясно понять своим читателям, что под своим вымышленным, условным миром он имеет в виду тот мир, в котором мы живем. Декарт объясняет, почему вид неба условного нового мира, созданного им, должен казаться читателям совершенно подобным нашему; он утверждает, что это вытекает в основном из прямолинейного распространения света, являющегося следствием воздействия декартовых вихрей на особые „небеса" различной величины. Эти небеса являются как бы оптическими средами; граница между отдельными небесами играет роль поверхностей, преломляющих лучи, исходящие от звезд. Поэтому происходит ряд явлений, подобных оптическим: звезды видны не в том направлении, в каком они в действительности находятся (рефракция особого типа, отличная от земной), одна звезда может быть одновременно видна в нескольких точках неба или совсем не видна; этими же явлениями объяс-

няются хвосты комет, представляющих собой, согласно Декарту, светила, превосходящие по своей величине звезды.

Отметим замечание автора о том, что звезды находятся на таких больших расстояниях от Земли, что люди не могли бы заметить звездных параллаксов; приводим его соображения (с несущественными изменениями):

„Линии, соединяющие землю со звездами, необходимо предположить столь длинными по сравнению с диаметром окружности, описываемой Землей вокруг Солнца, что находящиеся на Земле люди видят звезды как бы неподвижными и прикрепленными к одним и тем же местам небосвода, вне зависимости от того, в каком месте своей орбиты находится Земля; иными словами, пользуясь терминами астрономии, мы должны предположить эти линии столь протяженными по сравнению с диаметром Земли, что люди не могли бы заметить звездных параллаксов“.

Исчезновение и появление новых звезд объясняется в главе XV все тем же преломлением, совершающимся на границе двух небес.

Мерцание планет, вызываемое их вращением вокруг своей оси, меньше, нежели мерцание неподвижных звезд, вращающихся сравнительно быстрее.

Луна, лишенная этого движения, совершенно не мерцает. (Очевидно, Декарт имеет в виду то обстоятельство, что Луна обращена к земным наблюдателям всегда одной и той же стороной).

События, о которых будет сказано дальше, не дали возможности автору закончить этот труд.

22 июня 1633 г. Декарт сообщил Мерсенну: „Мой «Трактат» почти закончен, но мне надо еще его исправить и описать“. (По-французски „décrire“; здесь, видимо, описка или опечатка, — очевидно, он хотел сказать „récrire“, т. е. написать снова). Однако Декарту не удалось осуществить свое намерение.

23 июня 1633 г. в Риме был осужден инквизицией Галилей за книгу „Диалоги о двух величайших системах мира“ (Птолемея и Коперника), опубликованную годом раньше.

Об осуждении Галилея Декарт узнал пятью месяцами позже почти случайно и сразу же приостановил свою работу по завершению „Трактата“.

Декарт описывает свое впечатление об осуждении Галилея в письме к Мерсенну следующим образом: „Должен сказать вам, что, осведомившись на днях в Лейдене и Амстердаме о том, нет ли там «Системы мира» Галилея, так как мне стало известно, что эта книга напечатана в Италии в прошлом году, я получил ответ, что книга была действительно напечатана, но все ее экземпляры сожжены в Риме и Галилей приговорен к какому-то наказанию. Это меня так поразило, что я решил сжечь все мои бумаги, по крайней мере никому их не показывать; ибо я не в состоянии был вообразить себе, чтобы он, итальянец, пользовавшийся расположением даже папы, мог быть осужден за то, без сомнения, что хотел доказать движение земли; насколько я знаю, это было осуждено некоторыми кардиналами, но, как мне стало известно, затем публично преподавалось даже в Риме. Признаюсь, если движение земли есть ложь, то ложь и все основания моей философии, так как они явно ведут к этому же заключению. Учение о движении земли так тесно связано со всеми частями моего «Трактата», что если его исключить, то все остальное делается негодным. Но так как я ни за что в мире не пожелаю, чтобы мною было написано сочинение, в котором оказалось бы хотя одно слово, не одобренное церковью, то я лучше уничтожу его, чем выпущу с пропусками“. (См. „Correspondance“ за 1638 г.).

В Голландии на учение Коперника смотрели благосклонно. Не случайно, что сразу после осуждения Галилея братья Эльзевир поспешили напечатать латинский перевод „Диалогов“. Естественно, что ни жизнь, ни репутация Декарта в то время

не подвергались никакой опасности в случае опубликования „Трактата“ в Голландии, — скорее наоборот: „Трактат“ был бы встречен там доброжелательно хотя бы потому, что протестантская церковь не прочь была блеснуть своим показным либерализмом на фоне католической реакции.

Однако Декарт, не питая особых надежд на защиту просвещенной общественности Франции и не доверяя временному и напускному либерализму голландских властей, а также в силу присущей ему осторожности решил отложить опубликование своего „Трактата“ до более благоприятного времени.

Впечатление от приговора, вынесенного Галилею, наложило свой отпечаток почти на все последующие произведения Декарта. Его осторожность, усугубленная воспитанием в иезуитской коллегии, обострилась еще больше после того, как ему стало известно о приговоре. По выражению одного французского комментатора, он стал „философом в маске“. Наличие этой маски сказалось в трудно объяснимом увлечении теологией, выразившемся в „открытии“ четырех новых доказательств существования бога (которые, впрочем, отцы иезуиты встретили прохладно, находя их чересчур краткими).[1]

Здесь уместно напомнить, что бог у Декарта не только свидетельствует о его благонадежности; он, кроме того, служит опорой его метафизики и физики: бог создал мир и законы, управляющие им; эти законы, раз установленные, являются вечными и неизменными; другими словами, вторичное вмешательство бога в дела мира невозможно. Последнее, конечно, лишь подразумевается; однако такие читатели, как Паскаль, сумели уловить мысль Декарта об ограниченности власти бога и не скрывали своего возмущения этим лицемерным приемом.

---

[1] Oeuvres de Descartes, изданные Ш. Адамом и Полем Таннери, т. XII, стр. 237.

К маскировке Декарт прибегает и в описаниях физических явлений: имя Коперника замалчивается и уступает место более приемлемому для церкви имени Тихо-Браге; вообще все вопросы, связанные с вращением земли, обходятся.

После осуждения Галилея у Декарта пропало всякое настроение писать, и он замолчал бы на много лет, если бы не то давление, которое на него оказывали приятели, в частности Мерсенн, хорошо осведомленный о том, что у него лежит большой, почти законченный труд, опубликование которого с нетерпением ожидалось многими просвещенными современниками; к тому же он и сам неоднократно давал неосторожные обязательства обнародовать свои новые философские идеи. Все были того мнения, что основная причина его отъезда в Голландию заключалась в необходимости уединиться, уйти от политических и религиозных бурь для спокойной работы над своей книгой.

При таких обстоятельствах Мерсенн, которому не чужда была некоторая наклонность к подстрекательству, опубликовал в предисловии к своей „Мировой гармонии“ одно из писем Декарта (1634), не называя его имени, предупредив своих читателей, что развитие идей, изложенных в этом письме, станет известным, как только автор пожелает.

Пришлось Декарту взяться за перо. Используя часть уже написанного, но не опубликованного труда и развивая его в новых направлениях, наименее опасных с точки зрения возможных последствий, он в течение нескольких месяцев 1634/35 г. подготовил к печати три небольших трактата: „Диоптрика“, „Метеоры“, „Геометрия“. Декарт добавил к ним предисловие, которое он назвал „Рассуждение о методе“.

Первая часть „Диоптрики“, по крайней мере две первые главы, трактующие о преломлении, были написаны еще в 1632 г. и присланы для ознакомления Гоолю. Последняя глава, касающаяся станка, изобретенного Декартом, составлена в 1629—1630 гг., после длительной переписки с мастером-

оптиком Ферриэ, с которым мы уже встречались. Трактат о метеорах был написан летом 1635 г. Весь труд был готов в 1635 г. Тогда же Декарт прочел за три вечера свою рукопись Константину Гюйгенсу.

Наибольшую трудность, очевидно, представляло составление предисловия и заглавия для всей книги. Вначале Декарт намеревался дать следующее название своему трактату: „Проект всеобщей науки, которая могла бы возвысить наш разум до состояния высшего совершенства; кроме того, «Диоптрика», «Метеоры» и «Геометрия», где наиболее любопытные примеры, выбранные автором в качестве приложений всеобщей науки, предлагаемой им, объясняются таким образом, что даже те, которые не учились, могут их понять". Чересчур напыщенное заглавие было затем заменено другим, излишне кратким: „Трактат о методе". После замечаний Мерсенна Декарт несколько раз менял заглавие и, наконец, остановился на следующем варианте, а именно:

Рассуждение о методе,
чтобы хорошо направлять свой разум
и отыскивать истину в науках.
Кроме того,
Диоптрика, Метеоры
и Геометрия,
которые являются приложением этого метода.

Вследствие скромности автора, а может быть и осторожности, фамилия его не была указана.

Страшная чума, свирепствовавшая в Лейдене в 1635 г., оказалась причиной задержки поисков издателя. Лишь в 1636 г. лейденский издатель Ян Мэр согласился напечатать труд Декарта; сын математика Скаутена, друга Декарта, выполнил чертежи для „Диоптрики", а возможно, и для „Метеоров". В конце 1636 г. были получены первые оттиски и переданы через Константина Гюйгенса (отца Христиана) Мерсенну.

Заботясь об интересах своего издателя, Декарт стал хлопотать через Мерсенна о привилегии — единоличном праве для своего издателя на печатание труда Декарта во Франции.

Мерсенн использовал этот случай, чтобы обратить внимание читающей публики на новое произведение и обеспечить ему успех. Обстоятельства сложились благоприятно для нашего автора: начальник канцелярии Сегье, в ведении которого находились дела о привилегиях, будучи писателем и родственником кардинала Берюлла, покровителя Декарта в молодости, предоставил привилегию и дал весьма хвалебный отзыв о книге. При этом он обнародовал фамилию автора, чем сильно смутил и взволновал Декарта, опасавшегося нападок и неприятностей в связи с некоторыми положениями первой части его книги.

„Рассуждение о методе“ с его приложениями было опубликовано 8 июня 1637 г.

Мы уже ознакомились в общих чертах с содержанием „Трактата о свете“, не оконченного и опубликованного лишь в 1664 г., после смерти автора; материал, послуживший основанием для этого труда, в значительной мере был использован при составлении „Рассуждения“, но с большими изменениями. Материал для написания „Диоптрики“ Декарт начал собирать приблизительно в 1632 г., а для „Геометрии“ — чуть ли не со школьной скамьи. О создании „Метеоров“ мы знаем очень мало; известно лишь, что он начал ими заниматься после появления римского паргелия в 1629 г.

Когда Декарт начал составлять свою „Диоптрику“, он предназначал ее в качестве одной из глав своего „Трактата о свете“. Отметим, что учение о свете в „Диоптрике“ носит совершенно иной характер, чем в „Трактате о свете“, а именно гораздо более прикладной, на что указывал сам Декарт в „Рассуждении“.

В начале XVII в. появились зрительные трубы и микроскопы; интерес, возбужденный ими, был так велик, что

трудно назвать крупного физика того времени, который не занимался бы оптикой. В числе их был и Декарт, написавший в связи с этим специальный трактат, а именно „Диоптрику". В седьмой главе „Диоптрики" мы находим фразу, конец которой заслуживает особого внимания: „Этим объясняется действие зрительных труб, состоящих из двух стекол, приставленных к краям трубы, которые дали мне повод написать трактат".[1]

Не только новизна и широкие перспективы, уже отчасти обнаруженные Галилеем, привлекали к новым приборам внимание физиков, но и таинственность, окружавшая их изобретение (см. примеч. 1 на стр. 560). Утверждение Декарта о том, что заслуга этого изобретения принадлежит Мецию, оспаривалось даже современниками. Зрительные трубы умели изготовлять лишь несколько человек во всем мире, но даже и они не были в состоянии объяснить принцип их действия. Хотя Галилей без посторонней помощи и построил себе телескоп, но вопрос о том, насколько ясно он представлял себе теорию этого прибора, остался нерешенным. Ни трудов, ни заметок по оптике он не оставил, несмотря на его большой интерес к этому вопросу, о котором свидетельствует его намерение (отмеченное в его труде „Sidereus Nuncius", 1610) написать историю зрительной трубы. К сожалению, он этого своего намерения не выполнил.

Лучшим знатоком оптики XVI в. можно считать Кеплера, посвятившего ей два крупных произведения, из которых наибольший интерес представляет его „Диоптрика" — весьма совершенный для того времени трактат, освещающий все вопросы, связанные с оптикой, с такой полнотой, какая только была возможна в первый период развития этой науки. При всех высоких достоинствах этого трактата он, в сущности, основан на неверной формулировке закона преломления, а именно на принятом физиками того времени законе, согласно

[1] Разрядка моя, — *Г. С.*

которому отношение углов преломления к углам падения есть величина постоянная.

Кеплеру хорошо было известно, что закон пропорциональности углов неточен; его таблицы, составленные с большей точностью, очень хорошо показывали отступления от этого закона; больше того, Кеплер знал о полном внутреннем отражении и даже определил значение угла полного внутреннего отражения для горного хрусталя, причем ошибка измерения не превышает 10′. В своей „Диоптрике“ он задолго до Декарта указал, что гиперболическая форма преломляющей поверхности линзы при параллельных пучках более выгодна, чем сферическая, но этот совершенно верный вывод был сделан на основании грубых приближений. При том младенческом состоянии, в котором находилась оптика, замена точного закона приближенным, обладающим тем свойством, что при малых углах погрешность весьма незначительна, не имела большого значения: вся современная оптика „параксиальных лучей“, которой мы широко пользуемся на практике, опирается на упрощенный закон пропорциональности углов. Кроме того, Кеплер на основании своих опытов рассматривал и описывал свойства линз почти исключительно с качественной стороны (в редких случаях, причем приближенно — с количественной); точное знание закона преломления было бы для того времени бесполезным, потому что тогда еще не умели подходить к задаче элементарного построения изображений через простые линзы. Хотя это может казаться парадоксальным, большие успехи Кеплера в оптике в большей части вызываются тем, что он отказался от решения слишком трудной для своего времени общей задачи диоптрического действия сферы и упростил ее для малых углов (Кеплер ограничивал их конкретной величиной 30°), что дало ему возможность отметить простые соотношения и подготовить почву для более поздних работ Гаусса и других математиков по созданию параксиальной оптики. В сущности, точный закон преломления стал необходимым значительно позже;

Декарт, открывший его раньше, чем можно было использовать на практике, придав ему преувеличенное для того времени значение, пришел к неправильному методу исправления аберраций линз: причина этого кроется в незнании явлений дисперсии света. Дисперсия и преломление так тесно связаны между собою, что то искусственное разделение, которое случайно произошло, надолго задержало развитие этой области науки. Декарт, в сущности, открыл в линзах то, что мы теперь называем сферической аберрацией; но последняя не могла быть обнаружена вследствие плохого качества стекла, неправильной формы преломляющих поверхностей и, главным образом, дисперсии материала линз, которая была объяснена только 60 лет спустя Ньютоном. Исправление же сферической аберрации было второстепенным делом.

Впрочем, все эти соображения нисколько не умаляют заслуги Декарта в открытии точного закона преломления и в его применении. Нередко крупное научное открытие возникает настолько рано, что оно не может еще найти своего рационального приложения вследствие слишком низкого уровня знаний, теоретических и технических, присущего данной эпохе.

Среди предшественников Декарта наиболее выдающимся в области изучения глаза и зрения был тот же Кеплер, который этому вопросу посвятил часть V главы своих „Paralipomena ad Vitellionem“ (1604); он правильно представлял себе роль хрусталика и сетчатки, не смущался, подобно некоторым своим современникам, обратными изображениями предметов на сетчатке, понимая, что правильное представление создается сознанием, опирающимся на опыт. Представления Кеплера об аккомодации, о близорукости и дальнозоркости, впрочем, уже известные Мавролику, мало чем отличаются от современных. Декарт использовал и развил труды Кеплера, „своего учителя“,[1] а также своих совре-

[1] Из письма к Мерсенну от III 1638.

менников — Ж. Тарда, написавшего в 1620 г. „Телескоп“ (трактат о глазе и процессе зрения, содержащий оригинальную догадку о том, как произошло изобретение зрительной трубы) и немецкого иезуита Шейнера, изложившего в 1630 г. в своей книге „Rosa Ursina“[1] мало оригинальную, заимствованную у Леонардо да Винчи и делла Порта теорию зрения, отличавшуюся от предшествующих только разъяснением действия очковых линз.

Вообще состояние физиологии в современном понимании этого слова (прежде оно обозначало собственно „науку о природе“ и лишь позже его значение ограничилось кругом вопросов, связанных только с жизненными явлениями) в эпоху, когда жил Декарт, определялось исключительно наследием древних ученых, для которых „живого тела“ не существовало. Как известно, до Гарвея (1620-е годы) считали, что кровеносные сосуды заполнены воздухом, а не кровью. В литературе по анатомии и физиологии первыми названы произведения Декарта и Гарвея.

Напомним, что в эпоху, предшествовавшую Декарту (и даже несколько позже), были очень распространены взгляды на зрение, заимствованные у древних и основанные на понятии „espèces intentionelles“, т. е. маленьких частиц, вылетающих из тел, подобных по форме этим телам, и вызывающих у человека ощущения, воспроизводящие образ предмета, из которого эти частицы вылетели. Такое упрощенное объяснение, распространившееся, впрочем, и на все остальные органы чувств человека, встречалось в учебниках и находило поддержку церкви.

Так обстояло дело с изучением анатомии и физиологии глаза. В еще худшем состоянии пребывала наука о физической стороне явлений, непосредственно воспринимаемых глазом, т. е. то, что мы теперь называем фотометрией, или

[1] „Rosa“ — здесь значит солнце; прилагательное „Ursina“ указывает на то, что книга посвящается герцогу Браччиано из рода Урси, или Орсини.

измерением световой энергии, точнее, измерением количественных показателей световой энергии; к тому же особенной потребности в науке, изучающей эти показатели, не было. Правда, в трактатах некоторых авторов, питавших пристрастие к чудесному, поклонников магии, — таких, как Кирхер и делла Порта, — можно найти упоминание об оптических приборах, ослепляющих и сжигающих на большом расстоянии; у Кеплера мы встречаем знаменитую фантастическую легенду об Архимеде, с помощью нескольких зеркал сжигающем флот неприятеля, осаждавшего его родной город Сиракузы. Более основательно проблемой фотометрии занимался Мавролик, который в своей книге „Photismi de Lumine", написанной в 1567 и изданной в 1611 г., приводит ряд фотометрических теорем; Леонардо да Винчи, в связи со своими профессиональными потребностями художника, изучал некоторые вопросы фотометрии и даже изобрел простейший фотометр-палочку для измерения освещенности того или другого приемника света; у Галилея встречаются соображения, связанные с отражением света от гладких и шероховатых поверхностей („Диалог о двух главнейших системах мира") и с освещенностью от прямых и косых лучей. Однако большинство этих работ основывается главным образом на интуиции их авторов. В отдельных направлениях Декарт пошел значительно дальше своих предшественников, поэтому справедливо ставить его имя рядом с именами Бугера, Ламберта и других основателей учения о световой энергии.

Вопрос о цвете также привлек внимание Декарта. Этот вопрос имеет большую давность, и это замечательное свойство источников света и освещаемых ими предметов всегда привлекало внимание пытливых умов. Однако в эпоху Декарта учение о цвете находилось приблизительно в том же состоянии, в каком оно пребывало у древних: цвет почитался за качество, свойственное телам и обусловливаемое смесью света и темноты. К этому вопросу мы вернемся несколько дальше (стр. 503 и 504).

При всей важности указанных вопросов, основной темой „Диоптрики“ Декарт избрал изучение новых зрительных труб и микроскопов. Обратим внимание на характерное различие между изложением этого вопроса у Декарта и тем способом изложения, который стал классическим в настоящее время. Сейчас рассматривают сначала общие законы распространения света, причем особо развивают теорию всех категорий оптических систем вообще, после чего приступают к описанию глаза в качестве иллюстрации оптической системы. Глаз представляется как естественная, без нашего участия осуществленная оптическая система, в которой выполняются изложенные Декартом в предыдущих главах законы распространения лучей. Автор „Диоптрики“ описывает свойства глаза с поразительной для того времени разносторонностью и ищет способы усовершенствования этих свойств; постепенно он приводит нас к пониманию зрительных труб как добавления к глазу.

Отметим, что такой способ описания вовсе не был обязательным для того времени; у Кеплера мы находим обычный порядок изложения, принятый в настоящее время. Но бесспорно, что метод Декарта имеет такое же право на существование, как и современный: всякий оптический инструмент может рассматриваться как некоторое добавление к глазу, улучшающее какие-нибудь свойства последнего.

Отделив зрительную трубу от глаза, как это делает не в переносном, а в прямом смысле автор „Диоптрики“, он, естественно, изучает ее свойства уже в качестве самостоятельной системы и, вооруженный своим точным законом преломления, интересуется той стороной теории зрительных труб, которая непосредственно связана с глазом. После того как Декарт на основании точной формулировки закона преломления вывел наиболее выгодные формы преломляющих поверхностей, он перешел к чисто технической стороне вопроса — к методике изготовления линз, обладающих этой формой.

Как обстояло дело с изготовлением зрительных труб в начале XVII в.? Мастеров-оптиков, умеющих изготовлять линзы для телескопов и микроскопов, было так мало, что их знали наперечет. Когда ученому физику или астроному нужен был оптический прибор, ему чаще всего приходилось самому учиться искусству шлифовать стекла. Так поступали Мидорж, математик Дебон, построивший себе настоящую домашнюю обсерваторию, по всей вероятности Гассенди и другие. Из профессионалов наибольшей известностью во Франции пользовался Ферриэ, конструктор математических и физических приборов, работавший для физика Морена, Мерсенна, Мидоржа и, в особенности, для Декарта.

В Голландии тоже существовала школа мастеров-оптиков, начало которой исходило от мастеров Янсена и Липпергея из города Миддельбурга и Якова Меция (из Алкмара), упомянутого Декартом и многими другими авторами. Но искусство мастеров этой школы было очень невелико. Сам Декарт и его приятель Константин Гюйгенс искали опытных голландских мастеров и не находили. Некий токарь, фамилия которого не известна, работавший по их заказу, не сумел удовлетворить Декарта, изготовив линзу не с гиперболической поверхностью, а со сферической (письма Гюйгенсу от 8 и 11 XII 1635).

Только полвека спустя появился замечательный мастер-оптик Гартсукер (1656—1725), выходец из этой школы, заслуживший настолько блестящую репутацию, что Петр I посетил его во время своего пребывания в Голландии и по его рекомендации пригласил к себе в дворцовую мастерскую его ученика — Логина Шеппера.[1]

Косвенное суждение о качестве линз того времени известно из письма Декарта к Гюйгенсу от 11 XII 1635, где он

---

[1] Сведения о состоянии оптики того времени можно найти в произведении астронома Гевелия (1611—1687) „Machina coelestis", изд. 1673 и 1679 гг

излагает способ определения качества линз, по идее совпадающий с так называемым методом Гартмана и состоящий в том, что перед линзой ставится экран с отверстиями, через которые проходят световые пучки, хорошая или плохая сходимость которых позволяет определять качество оптической системы. Однако источником света Декарту служит солнце, и пересечение лучей он определяет на глаз. Поскольку такой грубый способ удовлетворял его автора, то можно считать, что линзы того времени были во много раз хуже современных. О качестве стекла мы ничего не знаем, так как оптики XVII в. не могли подозревать, какое огромное значение оно имеет для получения хороших изображений и никто из них этим вопросом не занимался. Все же Декарт дважды упоминает об изготовлении стекла—в „Рассуждении о методе", где мы находим слова, посвященные силе огня и стеклу: „...как из этой золы, единственно неукротимой силой своего действия он образует стекло" (стр. 42) и в начале IX главы „Диоптрики", где он пишет относительно стекла следующее: „Еще не найден материал, имеющий эти свойства [необходимые для изготовления трубы, — *Ред.*], который превосходил бы стекло, когда оно очень чисто и прозрачно и состоит из наиболее чистой золы".[1]

Таким образом во времена Декарта общие требования, предъявляемые к качеству употребляемого для изготовления линз стекла, ограничивались прозрачностью, отсутствием окраски и грубых включений.

При таких обстоятельствах зрительные трубы не могли давать хороших изображений. Оптики декартовой эпохи не в силах были определить влияния плохого качества поверхностей и неоднородности стекла; впрочем, они и не ставили себе такой задачи. Этот вопрос в настоящее время только поставлен, но еще окончательно не решен, ибо он относится

[1] Под золой (cendres) Декарт, очевидно, понимает вещество, получаемое от сжигания особых сортов растений и содержащее сравнительно большое количество поташа, необходимого для варки стекла.

к самым сложным проблемам прикладной оптики нашего времени.

Несмотря на то, что диоптрика как наука была в зачаточном состоянии, эта наука отличалась именно теми особенностями, которые должны были привлечь внимание Декарта, обладателя нового метода нахождения истины в науках. Прежде всего она легко поддавалась упрощению, ее можно было свести к небольшому числу положений и в дальнейшем развивать как чисто математическую дисциплину. При этом она предоставляла большие возможности для важнейших практических применений, что в высшей степени соблазняло Декарта. В первой главе он предупреждает читателя о том, что имеет в виду мастеровых и поэтому постарается изъясняться просто и понятно; вследствие этого свое произведение он написал на французском, а не на латинском языке, на каком полагалось писать научные книги.

По этой же причине Декарт не затрагивает глубоких вопросов о природе света (теория вихрей, из которой как одно из следствий вытекает прямолинейное распространение света, излагается в „Трактате о свете"), а ограничивается лишь аналогиями. Свет представляет собой чрезвычайно кратковременное, даже мгновенное движение частиц материи, или действие, направляемое к глазу посредством воздуха или других прозрачных тел точно так же, как движение или сопротивление тел, встречаемых слепым, передается его руке через палку, — таково удачное сравнение Декарта, подчеркивающее весьма передовое для своего времени его воззрение.

По этому поводу Пуассон заметил: „Как это ни поразительно, но нас обучают смотреть с помощью слепого, лишенного зрения; нас учит тому, что происходит в глазе, человек, сам лишенный возможности его применять... Нет ничего, что могло бы лучше объяснить процесс зрения и свойства последнего".[1] Декарту не чуждо было стремление оживить

[1] „Commentaires et remarques sur la méthode de René Descartes", Vendôme, 1670, стр. 178—179.

изложение и облегчить понимание его читателю; отсюда сравнение света с виноградным соком, выдавленным из гроздей, неоднократно встречающееся в его произведениях, или другая аналогия, для которой привлекается игра в лапту, чтобы доказать закон преломления. Попутно автор „Диоптрики“ расправился с так называемыми „espèces intentionnelles“, о которых говорилось выше; за это он впоследствии подвергся жестоким нападкам со стороны его противников после опубликования книги. Попутно он затрагивает вопрос о цвете, объясняя, что цвета представляют собою не что иное, как разные способы восприятия света телами. В дальнейшем он указывал, что различие между цветами обусловливается неодинаковыми скоростями вращения шариков (атомов), составляющих эфир. Как уже было сказано, таких же взглядов придерживались некоторые крупнейшие ученые, например Ломоносов.

Однако наряду с прогрессивными взглядами Декарта в его высказываниях нашло свое отражение уже отжившее в то время поверье, согласно которому кошки видят в темноте благодаря свету, излучаемому их глазами.

Мимоходом Декарт делает важнейшее замечание: „Обратите внимание на то, что следует отличать движение или действие от стремления к движению...“. В этом мы можем усмотреть некоторые зачатки теории упругого эфира, но необходимо отметить, что такие предположения встречались и раньше.

Все сказанное выше о свете и цвете служит вступлением к доказательству закона преломления, на котором автор „Диоптрики“ останавливается очень подробно и к которому мы отсылаем читателя. Рассмотрим здесь лишь один из вопросов, наиболее интересовавших историков физики,—вопрос о приоритете, т. е. о том, знал ли Декарт о работе Снеллиуса, в которой последний изложил тот же закон преломления, но выразил его другим способом.

Как известно, знаменитый голландский физик Христиан Гюйгенс, сын друга Декарта, во время своего первого путешествия в Голландию узнал от профессора математики Гортензия о работе Снеллиуса и даже видел рукопись, в которой излагался закон преломления. Труд Снеллиуса не вышел в свет, и рукопись была утеряна; о содержании работы известно только из слов соотечественника Снеллиуса — Гюйгенса. Последний обвинил Декарта в том, что он использовал труд Снеллиуса в своей „Диоптрике". Это обвинение поддерживал крупнейший немецкий математик Лейбниц. Тщательное изучение переписки Декарта с его голландскими корреспондентами показывает, что обвинения Гюйгенса не обоснованы.[1]

Сам по себе вопрос приоритета большого значения не имел. Можно лишь поражаться тому, что Кеплер, обладавший исключительно тонким математическим чутьем, не открыл точного закона преломления (возможно, случайно, вследствие неудачного выбора угла, по которому измерялось преломление); но здесь важно другое обстоятельство. Доказательство закона, предложенное Декартом, представляет собой первую попытку объяснить механизм распространения света через прозрачные среды. Хотя это объяснение не соответствовало взглядам того времени на природу света ни современников, ни последователей Декарта, но сама форма доказательства применима к целому ряду явлений, в которых отношение скоростей играет основную роль; в частности,

---

[1] Глубокое искажение фактов можно найти, например, в хорошо известной книге М. Борна „Оптика", где примечание к первой странице исторического очерка гласит: „Снеллиус письменно сообщил о своем открытии другим исследователям и в том числе Декарту, который опубликовал его в своей «Диоптрике»". Это примечание Борна ни на чем не основано. Более подробно о приоритете в открытии закона преломления см.: D. S. Korteweg. Descartes et Snellius. Rev. d. Metaphysique et de Morale, 1896; G. Milhaud. Descartes et la loi des sinus. Rev. gen. des sci., 1907.

волновая теория Гюйгенса приводит к доказательству закона преломления, по существу мало отличному от предложенного Декартом.

Но прежде чем перейти к зрительным трубам, Декарт занялся глазом и аппаратом передачи визуальных ощущений. Каким было состояние знаний о глазе, мы видели выше. Некоторые основные сведения, добытые экспериментально, были известны из трудов Кеплера, Тарда, Шейнера, но Декарт значительно развил знания своих современников о глазе. Хотя в принципе он признавал эксперимент только в качестве орудия для проверки правильности той или иной гипотезы, но для глаза он сделал исключение. Было очевидно, что метод умозрительных заключений в этом вопросе ненадежен; кроме того, развившееся у Декарта с 1628 г. пристрастие к анатомии и медицине, свойственное семейству Декартов (дедушка его был врачом), нашло здесь широкое поле для исследований. Будучи первоклассным анатомом, он посвятил физиологии массу времени, изучая общие вопросы, связанные с его представлением о душе и теле; с этими вопросами он знакомит читателя в „Рассуждении о методе“ и еще подробнее в „Началах философии“, где он предполагал объяснить жизненные процессы.

Исследование бычьего глаза привело Декарта к новым открытиям. Многие опыты он проводил, наблюдая за живыми людьми. Адаптацию он изучал преимущественно у детей и получил ряд интересных, хотя и не вполне верных результатов в отношении влияния воображаемых представлений на величину глазного зрачка. Если в его взглядах на адаптацию и встречаются кое-какие ошибки, все же в основе их лежит правильная идея, близкая значительно позже развившемуся понятию условного рефлекса. Физиолог Геффдинг и историк физики Любимов приписывают именно Декарту первое высказывание об этом понятии; это мнение подтверждается следующим местом из 2-й части „Трактата о свете“:

„Чтобы понять, каким образом наша механика побуждается внешним предметом, действующим на ее органы чувств, к выполнению различных движений членов, представим, что такие нити, идущие от внутренних частей мозга и образующие сердцевину нервов, расположены в частях органа того или иного чувства так, что легко могут быть приведены в действие предметом, влияющим на это чувство. Как только нити приведены в движение достаточной силы, они начинают тянуть части мозга, из которых выходят. Благодаря этому открываются отверстия пор, расположенных на внутренней поверхности мозга. Через эти поры *животные духи*, находящиеся в полостях мозга, втекают в нервы и мускулы, служащие для управления машиной движения, совершенно таким же образом, каким, естественно, побуждаемся мы, когда наши чувства поражены аналогичным образом".

Понятие „животных духов", которое также принадлежит Декарту и которым он широко пользуется при объяснении передачи ощущений в мозг, долго считалось достоверным, и мы находим его в диссертации Ломоносова „De particulis physicis insensibilibus" („О нечувствительных частицах", — т. е. о том, что мы сейчас называем атомами).

О том, что у Декарта в зародыше была идея условного рефлекса, можно судить по некоторым местам „Диоптрики", и в особенности по книге. „О страдательных состояниях души".

Великий русский физиолог И. П. Павлов не случайно установил у себя бюст французского философа.

В одной из глав „Диоптрики", посвященной той ветви естественных наук, которую мы в настоящее время называем физиологической оптикой, Декарт касается также нового для той эпохи вопроса о передаче ощущений с сетчатки в мозг, и в общих чертах его объяснение можно считать правильным, кроме заключения о передаче всех ощущений в одну из желез мозга.

Несколько наивным является даваемое им в той же главе истолкование происхождения родимых пятен, основанное на

передаче от матери к ребенку зрительных восприятий, вызывающих пятна на его теле; но нужно помнить, что одна из основных целей Декарта, высказанных в „Рассуждении о методе“, заключалась в том, чтобы не оставлять без объяснения ничего таинственного и чудесного.

В главе, посвященной зрению, трактуется о совершенно новых для картезианской эпохи понятиях: об ощущении расстояния, основывающемся на различных явлениях, происходящих в глазе, и описанном в современном духе. Мы находим довольно правильную классификацию качеств объектов зрения: света, цвета, положения, расстояния, величины, формы, с указанием реакции глаза на все перечисленные факторы. Здесь мы впервые встречаемся с зарождением идеи разрешающей силы глаза.

Однако наиболее существенное состоит в том, что у Декарта впервые встречается рассуждение о „количестве света“ („Диоптрика“, гл. VI, стр. 111) с указанием на то, что это количество зависит от расстояния до предмета, величины глазного зрачка, площади, занимаемой на сетчатке изображением предмета. Все количественные соотношения, перечисленные автором, правильны, и если выразить их формулами, то получится полный список основных формул фотометрии; однако терминология Декарта, естественно, весьма несовершенна.

Значительное внимание уделяется обманам зрения; в „Диоптрике“ можно найти много нового материала, посвященного этому вопросу: автор хорошо понимает, что причина большинства так называемых „оптических обманов“ заключается не в глазе, а в интерпретации приемником ощущений той картины, которая образуется на сетчатке. Особенно интересно и близко к истине истолкование явления, которое мы теперь называем иррадиацией.

Что касается оценки расстояния между наблюдателем и рассматриваемыми предметами, то мы находим у Декарта

такие объяснения, которые можно почти целиком ввести в современный учебник. Единственно спорным является оценка порога стереоскопического эффекта на основании кажущегося диаметра луны: существование связи между этими двумя величинами более чем сомнительно, так как оценка кажущегося линейного диаметра луны совершенно произвольна и зависит от обстоятельств, не подлежащих определению.

Тем не менее количественное определение, приведенное Декартом (сто или двести футов), не так уж сильно отличается от принятой в настоящее время (порядка шестисот футов), в особенности если принять во внимание большую сложность этого вопроса, далеко еще не решенного и сейчас.

Изложив теорию зрения, Декарт, как и следовало ожидать, перешел к способам его усовершенствования. Прежде всего, приемник световых ощущений — мозг — слишком сложен, для того чтобы можно было пытаться в нем что-нибудь изменить. Это же относится и к глазу. Что же требуется от глаза? Декарт считает, что необходимо выполнение четырех условий: 1) чтобы на каждой точке сетчатки получалось изображение одной точки предмета; 2) чтобы, выражаясь современным языком, разрешающая сила была максимальна; 3) чтобы яркость предметов лежала в определенных пределах, не слишком малых и не слишком больших; 4) чтобы угол поля зрения был наибольшим.

Ни у кого из предшественников Декарта такого ясного, совершенно правильного с современной точки зрения представления об основных требованиях, предъявляемых к оптическим системам, не было. Когда в настоящее время выполняется расчет любой оптической системы, то он должен удовлетворять тем же перечисленным выше четырем условиям, отмеченным Декартом, обеспечивающим: 1) хорошее качество изображения, 2) определенную разрешающую силу, 3) заданную светосилу и 4) заданное поле зрения, — если только эти условия не противоречат друг другу.

Далее Декарт последовательно изучает, как можно улучшить эти четыре основные свойства глаза, рассматриваемого как оптический прибор. Попутно он касается дефектов глаза и дает довольно правдоподобное, хотя и оказавшееся неверным объяснение изменений в аккомодации глаза, связанных с возрастом.

Рассмотрев вопрос о способе увеличения изображения далеких предметов на сетчатке, Декарт подходит к решению этой задачи следующим образом: представим себе, предлагает он читателю, что мы прилагаем к глазу трубу, заполненную водой и закрытую с переднего конца искривленной стеклянной пластинкой определенного радиуса кривизны. Эту трубу рядом последовательных, не влияющих на ее действие изменений он превращает в обыкновенную зрительную трубу.

Таким оригинальным путем Декарт пришел к описанию зрительной трубы. Этот своеобразный способ прост, нагляден, легко понятен и все же он не удовлетворяет читателя, особенно если последний знаком с классическим подходом к теории оптических систем. Мы теперь привыкли к кардинальным точкам, фокусным расстояниям, дифференцированному понятию „увеличения“ и ко всем абстрактным, но очень удобным для применений понятиям, без которых немыслим современный подход к задачам прикладной оптики. В этом отношении кеплерова „Диоптрика“ ближе к современности, чем декартова, и, конечно, с помощью декартовой трудно составить проект зрительной трубы, удовлетворяющей современным техническим условиям, тем самым четырем условиям, которые выше перечислялись.

Такое чисто описательное изложение является недостатком декартовой диоптрики. А между тем из отдельных, мимоходом брошенных автором замечаний становится ясной полнейшая осведомленность его во всех основных и даже второстепенных оптических понятиях; иллюстрацией могут служить его вполне правильные рассуждения о роли отверстия первой

линзы трубы, свидетельствующие о том, что Декарт первый ввел понятие зрачков, имеющих такое важное значение в теории оптических приборов. Так же отчетливо Декарт представляет себе обратную зависимость, связывающую угол поля зрения и увеличение трубы.

Таким образом, ограничившись общими замечаниями об основных свойствах зрительных труб, Декарт переходит к вопросу, который он считает главным в своей книге: к вопросу о наилучшей форме преломляющих поверхностей. Под наилучшей формой Декарт понимает тот вид поверхностей, с помощью которой можно все лучи свести в одну точку; теперь мы сказали бы, что форма декартовых поверхностей определяется условием устранения сферической аберрации.

Огромной заслугой Декарта является то, что он понял основное приложение, вытекающее из открытого им точного закона преломления, — определение формы преломляющих поверхностей линз, образующих идеальное изображение. Никто до Декарта (исключая, конечно, Снеллиуса, который также знал точный закон преломления) не мог строго решить этой задачи; Кеплер ее решил лишь приближенно.

Сам Декарт нигде не говорит об аберрациях и, вероятно, очень смутно представлял себе их существование; но его выводы о форме поверхностей совершенно правильны, если иметь в виду получение хороших изображений на оси оптической системы. К сожалению, отсутствие сведений о дисперсии стекла сводит на нет все результаты Декарта, так как прежде всего нужно было позаботиться об исправлении хроматической аберрации; лишь Ньютон, полвека спустя, нашел принципиально правильное решение вопроса: ввел понятие аберраций, вычислил наиболее существенные из них (хроматическую, сферическую, астигматизм), но, как известно, основываясь на неправильно выполненном эксперименте, пришел к неверному выводу о принципиальной невозможности создавать из линз системы, полностью исправленные в отношении хроматических аберраций.

В настоящее время кажется странным, что такой гениальный ученый, как Декарт, посвятивший столько лет жизни оптике и создавший такую глубокую и разностороннюю, хотя и не полную теорию зрительных труб, не сумел обнаружить дисперсию стекол, хотя проделал почти в точности тот же эксперимент, который навел Ньютона на правильное объяснение этого явления.

Общеизвестно, что одна из основных черт картезианской философии заключается в отрицании опыта как основы физических гипотез: теорию создает разум, а опыту предоставляется лишь второстепенная роль, — он предназначается для суждения о правильности той или другой теории. И все же ссылаться на это обстоятельство для объяснения декартовой неудачи в отношении дисперсии нельзя. В области оптики Декарт оценивал значение опыта очень высоко и сам усиленно экспериментировал; правда, в „Диоптрике" он умалчивает об этом, но в его письмах к современникам встречаются частые упоминания о проделанных им опытах и описания приборов для экспериментирования. В уже цитированном выше письме к Гоолю Декарт весьма подробно характеризует прибор для измерения рефракции, основанный на применении точного закона преломления. Особенно интересно письмо к Константину Гюйгенсу от 11 XII 1635, в котором Декарт сообщает, что тщательно определял показатель преломления стекла, хрусталя и горного хрусталя, для чего по его заказу изготовляли специальные призмы. Наконец, в VIII главе „Метеоров" описывается старательно выполненное им исследование преломления, происходящего в стеклянных шарах, наполненных водой, с целью выяснения природы радуги, прекрасно объяснившее это явление не только качественно, но и количественно, поскольку Декарт проделал большие вычисления на основании своего закона преломления.

Однако при наблюдении цветов возник ряд вопросов, для выяснения которых Декарт проводит опыт, весьма напоминающий опыт Ньютона с призмой и приведший последнего

к открытию дисперсии. В опыте с призмой и щелью, через которую проходит солнечный свет, Декарт отчетливо отмечает постоянство последовательности цветов спектра и ищет причину этого явления: он расширяет щель — цвет пропадает; следовательно, темнота необходима для образования цветов; тем самым подтверждается традиционная, признанная всеми современниками Декарта, теория образования цветов из смеси света и темноты. Однако автор „Метеоров“ дает усовершенствованный вариант этой теории: по Декарту, цвета образуются более или менее быстро вращающимися под влиянием световых лучей шариками — атомами, составляющими эфир; цвета зависят от скорости вращения, которая, в свою очередь, зависит от соотношения темноты и света. Что касается связи между цветом и преломлением, то она осталась незамеченной! Может быть, в этом виновата недостаточная точность измерений показателей преломления, вызванная отсутствием каких-либо оптических инструментов и методики измерения, а без этой точности нельзя было уверенно установить связь между цветом и показателем преломления. Об этой точности можно судить на основании вычислений, выполненных Декартом и приведенных в главе из „Метеоров“, посвященной радуге. Точность, ограниченная тем, что источник света — солнце — обладает слишком большими угловыми размерами для малой дисперсии призм или шариков, действительно незначительна; можно сказать, она предельно мала; однако при большей тщательности и в ту эпоху Декарт мог бы обнаружить связь между цветом и показателем преломления. Он был на волоске от открытия, и только несоблюдение основного правила его метода (ничего не принимать за истину, что не является очевидным) не дало ему возможности опередить Ньютона; сила традиций и предвзятое мнение, как слишком часто бывает, одержали верх.

Декарт наблюдал хроматические явления не только в призмах и шариках: он должен был их увидеть и в зрительных трубах, действие которых он так правильно объяснил. Невероятно, чтобы он хоть раз не навел трубу на звезды или

микроскоп на какие-либо пылинки; цветные ореолы вокруг изображений этих объектов должны были натолкнуть его на правильное объяснение. Однако в произведениях Декарта мы не находим указаний на то, чтобы он когда-нибудь наблюдал через зрительные трубы! Последнее обстоятельство представляется весьма странным, ибо Декарт отнюдь не пренебрегал практической стороной изготовления и применения этих труб. Наоборот, богатая переписка и две главы его „Диоптрики" (IX и X) свидетельствуют о том, что он с большим интересом относился к этим вопросам. Возможно, низкое качество стекла и неопытность мастеров-оптиков привели к тому, что цветные ореолы пропадали в общем тумане нерезкости, хотя при таких условиях Галилей едва ли увидел бы на Сатурне неясные, но все же заметные образования, которые он принял за спутников. Всегда труднее объяснить, почему какое-нибудь открытие не было сделано, чем выяснить причины, вследствие которых оно осуществилось.

Задача определения формы линзы, исправленной в отношении сферической аберрации, которую в настоящее время любой студент второго курса решает на основании принципа Ферма, в эпоху Декарта представляла ввиду новизны исключительные трудности. Вообще говоря, решение такой задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка; к счастью, она представляет особо выгодный частный случай этого вопроса благодаря простоте формулировки закона преломления. Решение еще больше упрощается, когда на преломляющую поверхность падает параллельный пучок: тогда эллиптические и гиперболические поверхности, хорошо изученные Декартом, дают искомый результат. Комбинируя гиперболические и эллиптические поверхности со сферическими, Декарт с помощью двух линз полностью исправляет сферическую аберрацию для произвольного положения предмета. Несколько позже он нашел более общее решение этого вопроса, заменив две линзы одной с преломляющей поверхностью четвертого порядка; такими поверхностями он

систематически занимался, так как эти поверхности представляют большой математический интерес. Эти поверхности заслуженно получили название „декартовых овалов“.[1]

В замечательной главе о форме преломляющих поверхностей Декарт-физик вторично касается некоторых энергетических вопросов и излагает положение об освещенности предметов, известное в настоящее время под названием „принцип Чиколева—Манжена“; он приходит к выводу, что знаменитые архимедовы зеркала либо имели громадную величину, либо их вовсе не существовало.[2] Кроме того, „сжигающий на бесконечно большом расстоянии луч, который кто-то выдумал, представляет собой лишь мечту“, — пишет он по поводу предложения одного из изобретателей „лучей, сжигающих на расстоянии“ (как позже стало известно, Жан-Баттиста делла Порта).

Покончив с теоретическими соображениями, автор „Диоптрики“ переходит к технической стороне конструкции зрительных труб и микроскопов; описание отдельных деталей указанных приборов свидетельствует о том, что Декарт сам с ними не мало работал (хотя, как мы видели выше, он нигде об этом не пишет). В его конструкции можно даже найти весьма полезное приспособление, а именно зеркало, служащее для освещения непрозрачных тел, прикрепленное к объективной части микроскопа, которое применяется до сих пор и известно под названием „зеркала Либеркюна“, хотя последнее абсолютно ничем не отличается от зеркала Декарта.

Другое предложенное им приспособление — так называемый искатель — представляет собой вспомогательную трубу, прикрепленную к главной, обладающей меньшим увеличением, но большим углом поля зрения; назначение искателя — облегчить нахождение невидимых глазом небесных объектов. В этой же главе Декарт высказывает мысль о том, что от мастерства

[1] „Геометрия“, стр. 352.

[2] Более подробно Декарт пишет об этом в письме Мерсенну в январе 1630 г.

оптиков зависит возможность увидеть на небесных светилах такие же мелкие предметы, какие мы наблюдаем на земле!

Подобные же высказывания можно встретить и у современных ему изобретателей; это свидетельствует о том, что они не подозревают наличия диффракционных явлений. Совсем в другом положении был Декарт: он знал ряд диффракционных явлений — рассеяние от сильно освещенных отверстий малых размеров, цветное рассеяние от отдельного волоса и совокупности близко расположенных волос (гусиное перо); но он не мог угадать, что эти эффектные, но непонятные явления ставят границу беспредельному улучшению качества изображения, — даже Гримальди и Гук, которым обычно приписывают открытие диффракции, отнюдь не подозревали ее влияния на качество изображений. От наблюдения тех странных явлений, которые происходили в тенях предметов, когда источник света имеет весьма малые размеры, до понимания связи между разрешающей силой оптического прибора и апертурой последнего — громадное расстояние, которое было преодолено лишь полтора века спустя благодаря работам Френеля и Фуко.

В одной из глав „Диоптрики" Декарт проявляет себя и как физиолог; здесь мы находим два любопытных замечания, относящихся к явлению адаптации: 1) прежде чем приступить к наблюдению через трубу, необходимо „смягчить" свое зрение пребыванием в темноте и 2) настроить свое воображение на рассматривание далеких предметов, что должно вызвать расширение глазного зрачка. Первый совет, несомненно, правилен, второй же может вызвать сомнение, однако с точки зрения взглядов Павлова на условные рефлексы он заслуживает серьезного внимания и подтверждает уже высказанное мнение о том, что Декарт предугадывал возникновение учения о рефлексах.

Углубляясь все дальше в практику, автор „Диоптрики" посвящает последнюю главу трактата вопросу шлифовки гиперболических поверхностей. В наше время станок, предложен-

ный им для этой цели, может показаться детской игрушкой, но надо помнить, что в то время техника шлифовки стекол (даже при сферических поверхностях) только что родилась; не более двух-трех десятков лет отделяют начало производства зрительных труб (не считая единичных образцов, изготовленных несколько ранее) от момента, когда Декарт занялся своим специальным станком. Прежде чем изложить свои мысли в „Диоптрике", он вел длительную и подробную переписку с мастером Ферриэ, привлекал к работе голландских токарей-оптиков и вообще проявлял в этом деле необычный для него энтузиазм.

Не все физики разделяли надежды Декарта на блестящие перспективы линз с гиперболическими поверхностями. Судя по письму Гюйгенса к Декарту (28 X 1635), голландский математик Гортензий брался изготовить зрительную трубу из линз со сферическими поверхностями, с помощью которой оказалось бы возможным читать книгу с расстояния в лье (4 километра). Все же большинство ученых поддерживало Декарта; Мидорж и Мерсенн помогали ему не словом, а делом, подыскивая для него мастеров. Несмотря на все усилия, станок, предназначенный для шлифовки несферических поверхностей, построен не был. Возможно, что одной из причин явилось то обстоятельство, что мастеру Ферриэ удалось изготовить линзу с гиперболической поверхностью и без специального станка.

Конечно, состояние техники изготовления линз было слишком низко, чтобы применение линз с поверхностями особого вида могло принести заметную пользу. Вскоре после Декарта была открыта дисперсия, и основным усовершенствованием в технике изготовления оптических систем явилось применение ахроматизованных линз; помимо хроматизма, одновременно удалось исправить и сферическую аберрацию, причем без применения асферических поверхностей; естественно, что интерес к последним пропал. Но прошло три века, и снова строятся станки, уже точные и производительные, для шли-

фовки параболических и других поверхностей. В самое последнее время была предложена конструкция станка, основная идея которого заимствована у Декарта.

С помощью специальных станков, шлифующих несферические поверхности, можно заметно повысить оптические качества некоторых типов оптических систем. Немалая заслуга в этих трудных изысканиях принадлежит советским оптикам.

Метеорологические явления для Декарта представляли особый интерес, ибо они своей величественностью больше всего поражали а также пугали народное воображение: казалось, что ими управляли какие-то таинственные, сверхъестественные силы; поэтому посвященный этим явлениям трактат не мог не привлечь всеобщего внимания; кроме того, помимо своей воли, Декарт оказался вовлеченным в научное соревнование со своим соперником Гассенди, пытавшимся объяснить замечательное явление ложного солнца, наблюдавшееся Шейнером в Риме в марте 1629 г. От этого соревнования, организованного их приятелями, нельзя было отказаться, тем более, что Гассенди в глазах своих современников пользовался большим авторитетом, по мнению Декарта, совершенно незаслуженным.

Декарт вообще не жаловал своих коллег; об этом свидетельствует его переписка, из которой можно почерпнуть высказанные им мнения о крупнейших ученых-современниках — Ферма, Гассенди, Робервале, Гоббсе, не говоря уже о более мелких (например Бекман), которых он просто презирал. Исключение он делал лишь для своего друга Мерсенна; впрочем, это не помешало ему дать уничтожающий отзыв о зеркальной трубе, изобретенной Мерсенном, хотя она и до сего времени упоминается и находит полезное применение.

И, наконец, самым главным для Декарта стимулом к изучению метеорологии послужили те широкие возможности, которые последняя предоставляла для применения его метода. В этой почти неисследованной научной области необходимо было начать работу с самых основ, очистить ее от элементов чудесного, от множества народных предрассудков и превра-

тить эту дисциплину, засоренную больше, чем всякие другие, духом схоластики и метафизики, в точную науку, отнеся ее к отделу физики. При этом Декарт преследовал цель избавить человеческий разум от удивления и восхищения,— чувств, по его мнению, вредных для человека, потому что они парализуют и тормозят его творческие силы и влекут на путь религиозного восторга. С первой же страницы „Метеоров“ автор обещает доказать примерами, что самые поразительные явления на земле имеют естественные причины.

Заканчивая трактат, он утверждает, что в будущем и на небе не останется никаких явлений, которые могли бы вызвать удивление или восторг.

Основным вопросом „Метеоров“ Декарт считал вопрос об облаках, являющихся, по его мнению, причиной всех метеорологических явлений. Облака, поднимаемые ветром, собираются в атмосфере в виде туч, которые затем превращаются в осадки, как то: дождь, снег, град; из туч рождаются бури, гром и молния, природу которых Декарт объяснил весьма примитивно, т. к. в его время еще не были известны основные свойства электричества.

Закончив изложение явлений, происходящих в атмосфере и наблюдаемых нами, Декарт приступает к описанию и объяснению других атмосферных явлений, которые „мы видим, несмотря на то, что их там нет“: радуга, гало вокруг светил, ложные солнца. Иллюстрацией последних служило знаменитое ложное солнце, наблюдавшееся в Риме в 1629 г.

Природу радуги Декарт изучал, исследуя явление преломления световых лучей в стеклянных шарах, заполненных водой; обобщив полученные результаты, он использовал их при объяснении возникновения радуги во множестве капель воды и в облаках.

Глава о бурях содержит много материала, заимствованного из рассказов путешественников и моряков. Декарт дает простые объяснения многим явлениям, считавшимся до него сверхъестественными, как, например, блуждающим огням (ог-

ням святого Эльма), фантастическим картинам, якобы появлявшимся в небесах по ночам или в сумерках и наблюдавшимся одновременно многими зрителями, (например эскадроны, воюющие друг с другом, всадники-привидения и т. д.).

Не занимая читателей вымышленными чудесами, Декарт обращает их внимание на истинные явления природы, например изумительные по своей красоте шестиконечные звездочки, из коих составляются снежинки, — одно из наиболее замечательных, но непонятных для наших предков чудес природы, как об этом говорит автор „Метеоров" в шестой главе. До Декарта снежные кристаллы были исследованы и Кеплером (1611), написавшим о них трактат, и Гассенди (1629); сам Декарт изучал снежные кристаллы зимой 1635 г., а град — летом того же года.

Начиная с 1637 г. Декарт неоднократно выражал пожелание, чтобы его „Метеоры" заменили старые учебники физики в иезуитских коллегиях. Однако этому не суждено было осуществиться, так как не настало еще время для перестройки преподавания в духе материалистических воззрений; тем более это было невозможно в иезуитских школах. Все же утешением для Декарта послужило то обстоятельство, что иезуит Фурнье употребил большую часть материалов второй главы „Метеоров" для своего произведения „Гидрография, или теория и практика мореходства", опубликованного в 1643 г., где, в частности, использованы мысли Декарта о причинах возникновения ветров постоянного направления (пассаты и муссоны).

В третьей главе „Метеоров" Декарт изучает свойства морской соли: ее вкус, способность сохранять пищу от порчи, делать воду более плотной, понижать температуру замерзания воды и многие другие. Вопрос о морской соли подробно рассматривался во всех трактатах о метеорах как в самое древнее время, так и в эпоху Декарта. Небезинтересно в связи с этим познакомиться с содержанием трактатов, посвященных метеорам.

В большом трактате Евстахия Сен-Поля „Summa Philosophia“ (1611) глава о метеорах содержит изложение следующих вопросов: пары и испарения; ощущение огня, света, сырости, сухости; кометы, молнии, блуждающие огни; тучи, дожди, туманы...; морская соль, приливы и отливы... землетрясение; ветер.

Другой автор — Шарль Раконис — в конце первого тома своего „Курса философии“ (1637) делает дополнение, содержащее сведения о метеорах, и придерживается такого же порядка в изложении вопросов. Любопытно, что у обоих физиков раздел о кометах находится вне связи с разделом о звездах и планетах и присоединен к описанию явлений, связанных с огнем: молний, блуждающих огней и т. д.; землетрясения отнесены к области метеорологии и связываются с ветром. Кометы и землетрясения были исключены Декартом из метеоров, и все последующие авторы трактатов о метеорах последовали его примеру.

Вопрос о морской воде позволил Декарту построить стройную и логическую, хотя и неверную, потому что не опирающуюся на эксперимент, теорию, и тем самым показать, насколько его метод был плодотворнее метода, лежавшего в основе метафизической теории „субстанциональных форм“ и аналогичных абстрактных понятий, выражающих чисто формальные качества вещей, с помощью которых по сути дела ничего не объяснялось.

Как бы ни были произвольны и мало обоснованы представления и построения Декарта, их наглядность, естественность и логичность делали их весьма плодотворными, позволявшими развивать вширь и вглубь любую область науки, по крайней мере до тех пор, пока опыт не опровергал их неправильности.

Далее Декарт переходит к изучению жидкостей.

Частицы жидких тел аналогичны маленьким угрям, только что выловленным из воды и лежащим кучей на дне лодки, — они соприкасаются и переплетаются между собой, но, будучи

скользкими, никогда не завязываются узлом и не сцепляются, вследствие чего их всегда легко отделить друг от друга. Наоборот, частицы, из которых состоят твердые тела, прикреплены друг к другу и переплетены, как веточки кустов, растущих рядом и образующих живую изгородь.

Доказав, что все явления природы могут быть объяснены простыми причинами и что самые чудесные из них находят естественное истолкование, Декарт наносит сильный удар по предрассудкам, весьма распространенным в его эпоху. Он даже вводит специальное выражение „наука о чудесах", напоминающее заглавие одного из произведений Порта — „Естественная магия"; однако в отличие от Порта, который сам увлекался не только естественной, но и сверхъестественной магией, Декарт не признает ничего недоступного пониманию.

Несмотря на блестящее остроумие и изобретательность представлений и доказательств Декарта, первые семь глав „Метеоров" представляют лишь исторический интерес. Настоящей науки о метеорах в эпоху Декарта не могло быть, и даже гений не в состоянии был бы ее создать при полном отсутствии самых элементарных понятий об электричестве, а также о свойствах жидких и твердых тел.

Иначе обстоит дело с последними главами, особенно с восьмой, в которой трактуется вопрос о радуге. Здесь Декарт нашел замечательные возможности для применения своего математического гения; это явление сводится к действию на свет водяных капель, имеющих вид шаров; оно целиком подчиняется законам оптики, а Декарт был (по признанию его современников) наиболее крупным оптиком своего времени. Правда, для полного решения вопроса о природе радуги ему нехватало знания дисперсии и диффракции — тех камней преткновения, на которые натолкнулась и в результате коих отчасти потерпела крушение его теория зрительных труб и микроскопов.

Декарт начинает изложение главы VIII следующими словами: „Радуга — столь замечательное чудо природы, и над ее

причинами, до сих пор столь мало известными, во все времена столь настойчиво задумывались пытливые умы, что мне трудно найти вопрос, на котором я лучше мог бы показать, каким образом при помощи применяемого мною метода можно притти к знаниям, которыми не обладали те, чьими сочинениями мы располагаем".

Несомненно, что Декарт несколько преувеличивает степень неведения, в котором пребывали люди науки в отношении знаний о природе радуги. Ни одним метеорологическим явлением так много не занимались философы предшествующих столетий и современники Декарта, как радугой. Уже Вителлио, собрав материалы о радуге из произведений авторов древности, начиная с Аристотеля, указал на роль преломления при образовании радуги (что не принималось во внимание ранее). Теодорик (1311) описал ход светового луча через дождевую каплю при образовании главной радуги и радуги второго порядка. Его объяснения правильны с качественной стороны. Количественно Теодорик решить задачу не мог, не зная закона преломления. Впрочем, его произведение „De radialibus impressionibus" было скрыто в библиотеке монахов-проповедников в Базеле и увидело свет только в 1814 г., вследствие чего Декарт не мог его знать.

И. Флейшер (1571) в своем сочинении „De iridibus doctrina Aristotelis et Vitellionis" замечает, что лучи, образующие радугу, претерпевают два преломления и одно отражение, причем отражение происходит не в той же капле, а в другой, находящейся позади нее. Путем измерения он определил, что радиус дуги равен 42°.

Франциск Мавролик в трактате „Theoremata de lumine et umbrae" также коснулся теории радуги и привел свое объяснение, ныне забытое.

Помимо того, изучением радуги занимался Марк Антоний де Доминис (1611), автор теории цветов. Он делал опыты, весьма схожие с теми, которые Декарт описывает в VIII главе „Метеоров". Результаты наблюдений привели его к следую-

щим выводам: лучи, падающие на часть поверхности шара, обращенную к источнику света, и преломляющиеся в направлении к противоположной части поверхности, не все проходят сквозь последнюю; часть их отражается вниз и после повторного преломления вновь выходит из шара через его верхнюю часть. При этом луч, выходящий из нижней части поверхности, пробегает внутри него наименьшее расстояние, а следовательно, получает самую незначительную примесь темноты и кажется красным, в то время как другие лучи, которым приходится проходить внутри шара более длинные пути, постепенно темнеют. Когда солнце озаряет дождевые капли, свет в них видоизменяется совершенно так же, как в шаре, и мы получаем от одной капли красный цвет, от другой зеленый, и т. д. А так как те же условия встречаются в небе на дугах, окружающих точку, противоположную солнцу, то мы видим концентрические цветные круги, общим центром которых является упомянутая точка.

Однако определить радиусы концентрических дуг де Доминис не мог, так как не знал закона преломления.

Из числа авторов, занимавшихся изучением радуги, следует еще упомянуть Герриота, давшего в 1606 г. свое объяснение явления радуги.

Мы не знаем, какие из перечисленных сочинений были известны Декарту, — в своих работах он редко ссылался на кого-нибудь. Впрочем, что касается вопроса о природе радуги, то здесь он делает исключение и приводит высказывания Мавролика, и то лишь для того, чтобы опровергнуть его со свойственным ему пренебрежением к физикам — как предшественникам, так и современникам.

Можно оспаривать приоритет Декарта в объяснении явления радуги, — Ньютон, не питавший симпатий к Декарту, приписывал приоритет Доминису; но нельзя не согласиться с тем, что Декарт по сравнению с Доминисом сделал большой шаг вперед, что обусловлено знанием точного закона преломления. Вместо общих, расплывчатых качественных описаний

явления Декарт приводит четкий количественный расчет, первый точный тригонометрический расчет хода лучей через оптическую линзу (шаровой формы). Его теория радуги — наиболее совершенное произведение, равноценное его лучшим математическим работам. В согласии с основными положениями своего метода Декарт разбил задачу на простейшие составляющие; в данном случае он отделил экспериментальную часть от вычислительной.

Его эксперименты с шаровыми линзами своей простотой, логической последовательностью исполнения напоминают опыты, которые после него проделал Ньютон с призмами для изучения дисперсии.

Лишь упорно преследовавшая Декарта предвзятая мысль о вращении придуманных им частиц эфира, которая так наглядно объясняла цветные явления при преломлении лучей, идущих от стеклянных призм и шаров, помешала ему открыть дисперсию. Повидимому, при более тщательной постановке опыта он был бы в состоянии измерить значения показателей преломления с точностью, достаточной для того, чтобы обнаружить связь между цветом и показателем преломления. Например, для воды Декарт приводит значение показателя преломления, равное $\frac{250}{187}$, т. е. 1.337, вместо правильного значения 1.334. Такая точность — треть процента — делает честь автору измерений.

Вычислительная часть его работы представляет большой интерес; она содержит все, что нужно для нахождения соотношений, связывающих цвета и значение показателя преломления. Декарт пишет: „Впрочем, я без труда узнал, почему красный цвет находится снаружи внутренней части радуги. . .“ и объясняет этот факт большей толщиной стекла призмы, проходимой красными лучами, по сравнению с остальными.

Здесь же встречается упоминание о том, что показатель преломления теплой воды несколько меньше, чем холодной (очевидно, по причине того, что теплая вода менее плотная, чем холодная).

Последние главы „Метеоров“, в которых Декарт пытается объяснить цвет неба, появление колец вокруг солнца и луны при определенных атмосферных условиях, а также так называемые „ложные“ солнца (паргелии), по мнению автора, представляли собой основной предмет трактата о метеорах; об этом свидетельствуют его письма к Мерсенну от 8 X 1629, от 18 X 1629, от (?) 1630, 3 V 1634, а также Гоолю от 19 V 1635, в которых он спрашивает своего друга относительно подробностей, известных ему об этих явлениях; особенно интересовало Декарта явление „короны вокруг свечи“, неоднократно наблюдавшееся людьми, пользовавшимися доверием Декарта, но упорно ускользавшее от самого Декарта, пока тот случайно не натолкнулся на него во время одной поездки по Зюдерзее на судне, перевозившем его из Фризы в Амстердам. Тем не менее состояние естественных наук эпохи Декарта было таково, что автор „Метеоров“ оказался бессильным решить сложнейшие задачи, связанные с этими явлениями, и его объяснения представляют лишь исторический интерес.

Однако трактат о метеорах при всех его недостатках представляет блестящий образец борьбы материалистического учения с предрассудками, с верой в чудеса и бесплодной формальной метафизикой средних веков, находившейся под защитой церкви и реакционных философов.

Последняя иллюстрация к „Рассуждению о методе“ — „Геометрия“ — была написана в течение нескольких недель в тот промежуток времени, когда набирались и печатались „Метеоры“. Однако материал для „Геометрии“ был готов уже давно. (О содержании „Геометрии“ см. статью А. П. Юшкевича).

Появление в свет первого большого произведения Декарта, ставшего уже знаменитым благодаря своим блестящим работам в области геометрии, естественно, должно было вызвать интерес просвещенных людей того времени. Напомним, что вокруг книги „Рассуждение о методе“, еще до ее появления, Мерсенном и некоторыми другими приятелями Де-

карта (в том числе лионским геометром Дезаргом) был поднят шум, весьма рассердивший автора этого труда. Причина заключалась не столько в его скромности, носившей несколько показной характер, сколько в опасении, что несмотря на все принятые им меры предосторожности, истинные убеждения Декарта будут преждевременно разгаданы его противниками, приверженцами Аристотеля и схоластической доктрины, а развитие и распространение этих убеждений окажется под ударом.

Декарт с нетерпением ждал отзывов о своей книге. По его просьбе немало экземпляров его книги было доставлено известным представителям философских наук. Декарта особенно интересовало мнение его бывших учителей иезуитов и их коллег — Бурдена и его ученика Ватье, Ноэля, Фурнье, — так как их мнение могло иметь решающее влияние на дальнейшую судьбу учения Декарта.

В общем, впечатление, вызванное „Рассуждением", не оправдало надежд друзей Декарта. Читатели, особенно в первое время, предпочитали молчать. Ватье вежливо, в общих чертах, похвалил трактат, умолчав о своем окончательном суждении. Бурден, автор курса математики, а также труда по оптике, высказал ряд возражений против некоторых тезисов „Диоптрики"; на защиту Декарта выступил его приятель Дезарг. Среди возражений были указания на чрезмерную краткость доказательства существования бога.

Несколько экземпляров книги было послано через Мерсенна видным представителям церкви в Риме; оттуда не последовало ответа. Три экземпляра были отправлены в Голландию знакомому Декарта — профессору Племпию, ставшему вскоре ректором Лувенского университета; он передал два из них своим коллегам Фромонду и Фурнье. Фромонд отозвался первым и прислал Декарту восемнадцать возражений (три против „Рассуждений", шесть против „Диоптрики", девять против „Метеоров"), защищая учение схоластов, в частности субстанциональные формы. Значительно позже

ответил и сам Племпий, стоявший на позициях старой школы; между ним и Декартом велась длительная полемика. Некоторые возражения были получены также от иезуита Цирманса, профессора математики в Лувенском университете; после горячих похвал „второму Колумбу“, открывшему новый мир в науке, он раскритиковал теорию радуги, чем вызвал пространные возражения Декарта.

Многие экземпляры „Рассуждения“ были разосланы в разные города; в большинстве случаев ответа не последовало. С особым волнением Декарт ждал отзыва профессора Collège de France[1] Морена, сторонника птоломеевой системы астрономии, противника Коперника и Галилея, к тому же убежденного астролога, в общем типичного представителя существовавших в ту эпоху отсталых взглядов. Последнее обстоятельство, очевидно, и объясняет интерес Декарта к мнению Морена. По примеру своих коллег Морен ответил осторожно, высказав несколько возражений против декартовой теории о природе света. Началась оживленная переписка, которая внезапно оборвалась в тот момент, когда автор „Диоптрики“ обнаружил из ответа парижского профессора, что он ничего не понял в его описании свойств света.

Военный интендант Пети, любитель науки, в свободное от службы время занимавшийся опытами по преломлению света, прислал Декарту несколько иронических замечаний по поводу доказательств существования бога, сообщив при этом, что он намеревается собрать ряд возражений против „Диоптрики“. Почувствовав в своем противнике скрытого безбожника, Декарт из осторожности оставил письмо без ответа, несмотря на все уговоры Мерсенна, очевидно, рассчитывавшего на особо захватывающий поединок. Более того, получив от Пети обещанные возражения под названием „Антидиоптрика“, Декарт отказался их прочесть, считая опасной

[1] Collège de France — учебное заведение открытого типа, основанное в 1530 г.; в нем крупнейшие ученые страны читали публичные лекции.

переписку с таким компрометирующим противником (см. „Correspondance“ за 1638 г.).

Решительным противником Декарта выступил советник тулузского парламента, знаменитый математик Ферма, к которому „Диоптрика“ попала вопреки желанию ее автора. Ферма напал прежде всего на декартово доказательство закона преломления и отражения; у него на этот счет были свои, давно продуманные соображения. Ферма сам много занимался оптикой, и ему принадлежит наиболее замечательное по краткости формулировки обобщение законов Декарта, известное под названием принципа Ферма. Впрочем, нападки Ферма были в основном направлены на некоторые приемы решения задач на максимум и минимум.

Особое место среди противников Декарта занимают Гоббс и Гассенди. Знаменитый английский философ Гоббс по некоторым своим воззрениям был близок к Декарту. Оба враги схоластики, оба последовательные механисты, они придавали мышлению основную роль в познании: для обоих мышление обусловливает надежный метод исследования. Оба направляют свои усилия на создание этого метода, и для обоих математика служит его базой. Оба считают, что наши ощущения являются чисто субъективными и не отражают истинных качеств предметов, что наши представления об объективной реальности не являются достоверными знаниями. „Видимое солнце, — пишет Гоббс — не есть то солнце, которое существует независимо от нас“.

Резко разделялись они по своим воззрениям на бога и на человеческую душу. Для дуалиста Декарта совмещались материалистические взгляды на неодушевленный мир с верой в бога и бессмертие души; Гоббс был атеистом. Он высмеивает аргументы, высказанные Декартом в доказательство бытия божия, и возражает против духовной субстанции, независимой от телесного организма. Познакомившись во Франции с Гассенди и Мерсенном, Гоббс был вовлечен последним в спор с Декартом из-за приоритета в вопросе о природе

света. Начавшийся спор о приоритете стал разгораться дальше, не без стараний Мерсенна, общего обоим противникам приятеля; но легковесные, а порой и нечестные возражения Гоббса, в которых использовались даже явные опечатки и нечеткость рисунков (см. в „Correspondance“ письмо Декарта Мерсенну от 21 апреля 1641 г.), вызвали весьма презрительное суждение Декарта о нем.

Гассенди по своим воззрениям был также близок к Декарту; такой же враг схоластики, материалист, передовой астроном, сторонник учения Коперника и выдающийся физик того времени, но в то же время верный католик, стремящийся примирить религию и материалистический взгляд на мир, Гассенди яростно боролся с Декартом по вопросам, не представляющим для нас никакого интереса: о доказательствах существования бога, о сущности души, которая для обоих коренным образом отличалась от тела. Это расхождение в их философских воззрениях было предметом длительной полемики, закончившейся серьезной ссорой, потребовавшей вмешательства общих им друзей — Сорбиера и Мерсенна, помиривших противников в торжественной обстановке.

Гоббса и Гассенди, по существу единомышленников Декарта, обычно относят к стану его врагов из-за их громких пререканий по второстепенным вопросам.

Однако следует отметить небольшую, но авторитетную группу друзей и учеников Декарта, поддерживавших его учение и оказавших ему посильную помощь.

Первый по времени и самый близкий к Декарту ученик его Жилльо, — бывший в юности не то его слугой, не то секретарем и ставший благодаря своим удивительным способностям и стараниям Декарта придворным математиком португальского короля, — помогал своему учителю в его борьбе против Ферма и других, менее крупных геометров. Значительно более существенную помощь оказывал Декарту советник парламента города Блюа, математик и оптик Флоримон Дебон, увлекавшийся вопросами преломления света и изготовлением

зрительных труб, для чего он завел собственную мастерскую. Не меньшую поддержку получал Декарт от лионского математика Дезарга, оригинальные идеи которого были поняты и оценены значительно позже, отчасти благодаря Декарту. Уже приблизительно с 1630 г., Дезарг следил за работами Декарта по оптике и восхищался ими; он помогал Мерсенну в его хлопотах по изданию „Рассуждения о методе". Кроме того, Дезарг собирался заинтересовать кардинала Ришелье, фактического руководителя французского правительства, предложением Декарта об организации производства зрительных труб. Однако Ришелье, будучи не вполне уверенным в успехе, не поддержал этого предложения.[1]

Если к этому небольшому числу сторонников добавить еще Мерсенна, самого ярого поклонника и популяризатора его идей, а также теолога Жибиэфа, оказывавшего большую поддержку Декарту в трудные моменты его жизни, по ошибке причисленного некоторыми авторами к его противникам, то мы получим почти исчерпывающий список первых картезианцев.

Пока с передовыми философами эпохи шла оживленная, иногда резкая, но в общем благожелательная полемика по различным вопросам философии, математики и физики, представители церкви в Риме, Франции и Голландии заняли выжидательную позицию, высказываясь лишь по второстепенным вопросам. За внешне корректной формой произведения Декарта они ясно чувствовали нечто враждебное и угрожающее основам религии и древней идеалистической философии, но искусная маскировка, препятствуя осуществлению прямого опровержения, служила Декарту хорошей защитной броней. Однако у этой брони было множество слабых мест, быстро обнаруженных опытным и бдительным противником. Тот же Племпий, убежденный сторонник старых воззрений, чутко прислуши-

---

[1] Petro Borello. Vitae Renati Cartesii, summi Philosophi, Compendium. Parisiis, 1656.

ваясь к сигналам из Рима, где поднималась очередная волна реакции, начал новую кампанию нападок на систему Декарта, увлекая на свою сторону ученых нидерландских университетов; формально картезианство было осуждено лишь много позже (1662), но уже вскоре после опубликования „Рассуждения о методе“ передовое учение Декарта натолкнулось на все растущую враждебность со стороны представителей церкви и реакционных профессоров. Лишь редкие, выдающиеся умы сумели понять свежие, еще не вполне зрелые материалистические мысли Декарта. Они оказались в меньшинстве и не смогли спасти картезианство от жестоких нападок церковников и схоластов. В довершение, быстрые успехи учения Ньютона ускорили кажущееся поражение картезианства, чему немало способствовали серьезные недостатки метода Декарта и ряд неудачных применений его, вызванных тем, что создатель новой физики во многих отношениях оставался, сам того не замечая, в плену старых воззрений.

Лишь много лет спустя, оглядываясь назад с вершин развивающейся науки, просвещенное человечество осознало великие заслуги Декарта в создании прогрессивного миропонимания и новых научных дисциплин и отвело ему среди самых великих мыслителей прошлого то место, которое он заслуживает.

Г. Г. Слюсарев.

О „ГЕОМЕТРИИ“ ДЕКАРТА

I

„Геометрия“ Декарта сразу же после ее выхода в 1637 г. стала предметом споров. Спорили о том, оригинально ли творение французского мыслителя, спорили и о том, насколько оно значительно.

Уже через год после издания „Геометрии“ Ж. де Богран обвинил Декарта в заимствовании ряда основных положений у знаменитого алгебраиста Ф. Виета. Сходное обвинение выдвинул позднее англичанин Дж. Валлис, который, впрочем, движимый националистическими чувствами, заявил, что источником для Декарта послужило сочинение по алгебре Т. Герриота. Напротив, многочисленные сторонники и поклонники Декарта считали вполне оригинальными как его метод в целом, так и частные его открытия.

Беспочвенные обвинения в плагиате были со временем полностью опровергнуты, и документальные свидетельства — переписка, черновые бумаги и т. п. — показали, что все главные идеи и теоремы „Геометрии“ принадлежат Декарту, хотя отдельные результаты, излагаемые в ней, были ранее получены Виетом, Герриотом и А. Жираром. Но в других формах вопрос об оригинальности „Геометрии“ продолжали обсуждать и в XIX и XX вв. Так же разделились мнения в вопросе о том, являлся ли Декарт создателем аналитической геометрии. Французский геометр середины прошлого века М. Шаль применил к учению Декарта

о приложении алгебры к теории кривых линий слова, сказанные некогда Монтескье о своем „Духе законов“: proles sine matre creata, т. е. „дитя, появившееся на свет, не имея матери“.[1] Напротив, Г. Мильо в 1921 г. писал: „Революция, которую Конт и историки XIX в. усмотрели в аналитической геометрии Декарта, — самообман. Не может быть и речи ни о революции, ни о творении, радикально преобразовавшем математику и обновившем науку, а только о нормальном развитии, после возвращения к грекам, руководящих идей их анализа“.[2] Времена меняются: ученые периода подъема капитализма готовы были признать революционный характер математики Декарта, но буржуазные ученые эпохи империалистических войн и пролетарских революций отказываются видеть революционные сдвиги даже в истории математики.

Единодушия не было и в оценке значения „Геометрии“. Математики-картезианцы видели в методе своего учителя квинтэссенцию математической мудрости и, во всяком случае, единственно возможный общий метод математического исследования. Эту концепцию подвергли критике еще Ньютон и Лейбниц. Оба они отдавали, с некоторыми оговорками, должное реформированной Декартом алгебре и ее приложению к изучению кривых, но оба отмечали ограниченность алгебраического метода Декарта, его принципиальную недостаточность в разработке математики бесконечного и необходимость в новых методах для исследования трансцендентных проблем.

Ф. Энгельс охарактеризовал подлинное значение математического творчества Декарта в следующих выразительных словах: „Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли

---

[1] М. Шаль. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, т. I. М., 1883, стр. 103.

[2] G. Milhaud. Descartes savant. Paris, 1921, стр. 141.

движение и *диалектика* и благодаря этому же *стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, зачатки которого вскоре были заложены и которое было в целом завершено, а не открыто, Ньютоном и Лейбницем".[1] И действительно, в том представлении о переменной величине, которое красной нитью проходит через труд Декарта, а также в той форме, какую он выбрал для введения переменной в математику, содержались ростки фундаментальных идей новой математики.

Отметим прежде всего, что переменные величины введены были Декартом — если и не явно, то по существу — в двух проявлениях. С одной стороны, это отрезки переменной длины, текущие координатные отрезки точки, своим движением описывающей плоскую кривую. С другой стороны, это численные переменные, выражающие длины, а для ординат — и направления координатных отрезков. Такой двуликий геометрический и числовой образ переменной обусловливал взаимопроникновение геометрических и арифметико-алгебраических методов и ставшее в очередь дня применение алгебры к геометрии. Само понятие о числе, под которым ранее понималось обычно положительное рациональное, Декарт — опять-таки, если и не явно, то фактически — распространил на всю область вещественных чисел: без этого немыслимо было аналитическое изучение непрерывных пространственных фигур, их взаимосвязей и движения. Тем самым Декарт порывал с восходившей к античности традицией, считавшей разнородными объекты арифметики и геометрии, дискретное число и непрерывную протяженную величину и придерживавшейся того правила, что нельзя переносить доказательства из одного рода в другой, например доказательства арифметики — на величины, не являющиеся числами.[2]

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. XIV, 1931, стр. 426—427.
[2] Аристотель. Аналитики. Госполитиздат, 1952, стр. 197—198.

Далее, переменные величины, как и параметры, т. е. величины, определенные в каждой задаче, но не фиксированные по значению, Декарт ввел в виде букв (x, y, z — для переменных или неизвестных; a, b, c — для параметров). Благодаря такому обозначению составленные из переменных и постоянных выражения смогли стать предметом исчисления буквенной алгебры.

Наконец, разработанное им буквенное исчисление Декарт применил к уравнениям, связывающим переменные величины. Эти уравнения, пока только алгебраические, явились первой достаточно общей формой функциональных зависимостей и вместе с тем основой аналитического исследования плоских алгебраических кривых.

Так в декартовой „Геометрии“ развивалась новая математика — наука о функциональных зависимостях, записанных в символических выражениях, подчиненных правилам некоторого алгорифма и, вместе с тем, геометрически представимых с помощью плоских линий. Анализ (простейших) алгебраических функций в сочетании с координатами — таков был новый, декартов метод исследования количественных и пространственных взаимосвязей, а, значит, и проблем механики, астрономии, физики и т. д. И сильные стороны, и недостаточность декартова метода раскрылись очень быстро. Об ограниченности его уже упоминалось, но не следует забывать, что в декартовой математике таились ростки и более глубокого синтеза геометрии и анализа в XIX—XX вв., и многомерных геометрий, и алгорифма исчисления бесконечно малых, даже математической логики. Декартова математика, как указал Энгельс, развилась в первую очередь в направлении дифференциального и интегрального исчисления.

Творение Декарта носило революционный характер. Но у Декарта, разумеется, были и предшественники. Его новаторские идеи возникли не на пустом месте; он отправлялся от античной теории конических сечений и от алгебраических

исследований восточных и европейских математиков средних веков. Краткий экскурс в прошлое алгебры и геометрии позволит лучше выявить грандиозность и своеобразие метода Декарта.

II

Еще за два тысячелетия до н. э. в древнем Вавилоне умели решать системы линейных уравнений, полные квадратные уравнения и некоторые задачи, приводящие к кубическим уравнениям с целым положительным корнем. Приемы решения вавилонян были числовые. Такие же числовые приемы были известны и греческим математикам, узнавшим их, вероятно, от ученых Востока. Однако в теоретической науке греков, в математике Эвклида, Архимеда и Аполлония развитие алгебры приняло иной характер. Для решения геометрических задач первой и второй степени были разработаны приемы преобразования прямоугольных площадей в другие прямоугольные площади, в целом равносильные преобразованиям линейных или квадратичных выражений и определению их положительных корней. Совокупность этих приемов в XIX в. получила название „геометрической алгебры". Понятно, что складывать, вычитать и приравнивать в геометрической алгебре можно было только члены одинаковой размерности: в ней действовал закон однородности. Умножению здесь соответствовало образование прямоугольной площади по сторонам; делению — разыскание по площади и стороне прямоугольника другой его стороны. Буквенной символической алгебры греческая математика почти не знала. Зачатки ее появляются уже в эпоху заката античной математики, в трудах Диофанта (III в. н. э.) — автора, которого за это, видимо, особенно высоко ставил Декарт.

Греки не ввели понятия об иррациональном числе как таковом. Число для них было собранием единиц. Даже дроби до Диофанта не относили к категории чисел, хотя алгорифм

исчисления дробей был знаком во всех деталях. Для изучения отношений однородных величин, которые могут быть и несоизмеримыми, Эвдокс создал тщательно развитую теорию, в которой равенство или неравенство двух отношений определялось путем сравнения целых кратных членов этих отношений.

Если отвлечься от некоторых моментов, то можно сказать, что определение равенства отношений у Эвдокса было равносильно определению равенства вещественных чисел в теории сечений Дедекинда. Учение об отношениях, между прочим, позволяло свести задачу об извлечении корня с натуральным показателем к вставке нескольких средних пропорциональных между двумя величинами.

Геометрическая алгебра и учение об отношениях явились теоретическим фундаментом значительной части „Начал“ Эвклида, интеграционных приемов Архимеда и труда Аполлония о конических сечениях. Исходным пунктом исследований Аполлония служило установление планиметрических свойств, так называемых симптомов плоских сечений обыкновенного конуса. С помощью геометрической алгебры Аполлоний выражал те соотношения между прямоугольными площадями, построенными некоторым образом на хордах конических сечений и на отрезках, отсекаемых этими хордами на сопряженных с ними диаметрах, которые мы теперь записываем в прямолинейных координатах уравнениями относительно вершины. Изучение свойств конических сечений, продвинутое Аполлонием весьма далеко, строилось на этих симптомах.

В частности, доказывалось, что симптом каждого вида конических сечений — эллипса, параболы и гиперболы — сохраняется при любом выборе семейства параллельных хорд и сопряженного диаметра, т. е., по-нашему, инвариантен относительно линейных преобразований координат. Аполлоний располагал и общей характеристикой всех трех видов конических сечений как геометрических мест к некоторым четырем

прямым,[1] характеристикой, до некоторой степени заменявшей наше общее уравнение второй степени.

Если заменить геометрическую алгебру символической, то симптомы Аполлония перейдут в уравнения аналитической геометрии, а некоторые его геометрические преобразования — в преобразования алгебраических выражений. Значит ли это, что у Аполлония имелась аналитическая геометрия? К такому выводу с некоторыми оговорками склонялся Цейтен и со всей определенностью вновь выразил его недавно Дж. Кулидж, писавший: „...сущность аналитической геометрии заключается в изучении мест с помощью их уравнений, а это было известно грекам и являлось основой их учения о конических сечениях".[1] Кулидж оставляет за Декартом расширение круга рассматриваемых линий, арифметизацию геометрии и связанный с этим отказ от принципа однородности. Однако хотя у Аполлония действительно существовали начатки аналитико-геометрических приемов исследования конических сечений, облеченные в форму равенств и преобразований геометрической алгебры, но в целом его теория не была аналитико-геометрической.

Прежде всего, изучение кривых не опиралось на одно только рассмотрение свойств определяющего ее уравнения. Геометрическая форма преобразований требовала многократных обращений к чертежу и синтетическим построениям. Это отмечал и Цейтен: „Геометрическая форма, при-

---

[1] Геометрическое место к четырем прямым есть плоская кривая, для всех точек которой имеет место равенство

$$l_1 l_2 = k\ l_3, l_4,$$

где l_1, l_2, l_3, l_4 суть длины отрезков, проведенных в определенных направлениях к четырем неизменным прямым; k — постоянная. Папп (конец III в. н. э) обобщил эту задачу на случай любого числа прямых. Подробнее см.: Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. Пер. П. С. Юшкевича. М.—Л., 1938, стр. 143—144.

[1] J. Coolidge. A history of geometrical methods. Oxford, 1940. стр. 119.

данная методом древних самой алгебре, была причиной многочисленных комбинаций между средствами и объектом геометрического исследования,—комбинаций, которые должны были оставаться довольно чуждыми аналитической геометрии, в особенности поскольку последняя стремилась превратить геометрические проблемы целиком в задачи исчисления“.[1] Так, средствами элементарной геометрии развивалась теория фокусов эллипса и гиперболы; так, синтетическими средствами исследовано было и геометрическое место к четырем прямым и пр. И несомненно, что еще Ньютон правильно понял дух античной теории конических сечений, когда, завершая свой вывод теоремы о том, что место к четырем прямым есть коническое сечение, писал: „Такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое не с помощью исчисления, но геометрическим построением, и изыскивалось древними“.[2]

Не касаясь того, что связанные с кривой отрезки диаметров и хорд не являлись для древних характеристиками положения отдельных точек ее на плоскости (т. е. координатами), что грекам чуждо было понятие об отрицательном числе и пр., замечу еще, что Аполлоний был далек от идеи текущих координат подвижной точки на кривой и тем более от идеи о функциональной зависимости и о кривой как ее геометрическом изображении. Наконец, мы не находим у него идеи об общем методе исследования алгебраических линий, для создания которого средства геометрической алгебры были совершенно недостаточны. Говорить об аналитической геометрии у древних еще меньше оснований, чем усматривать в гениальных, но частных интегрированиях Архимеда интегральное исчисление в подлинном смысле этого слова.[3]

---

[1] Г. Цейтен, ук. соч., стр. 138.

[2] И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. Цит. по: Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, М.—Л., 1936, стр. 122.

[3] См. также: Д. Д. Мордухай-Болтовской. Из прошлого аналитической геометрии. Тр. Института истории естествознания, т. IV, 1952, стр. 216—219.

Конические сечения служили древним для геометрического построения решений задач третьей степени, — для этого строились координатные отрезки точек пересечения двух линий, выражавшие положительный корень соответствующего кубического уравнения. Так, Менехм решил задачу об удвоении куба, а Архимед — задачу о делении шара плоскостью на два сегмента, объемы которых находятся в данном отношении. Греки применяли для решения таких или же трансцендентных задач и другие кривые — циссоиду, конхоиду, квадратрису, спираль Архимеда, — для описания которых предложены были специальные механизмы.[1] Они не дали, впрочем, и наброска общей теории высших кривых. Не соединили они в одно целое и разработанные ими геометрико-алгебраические приемы. Алгебра как самостоятельная наука, со своим собственным предметом и методом, родилась позднее.

Впервые выделили алгебру как особую науку замечательные ученые Средней Азии. Уже для хорезмийца Мухамеда ибн Муса ал-Хорезми (около 830 г.) алгебра являлась учением о решении уравнений первых двух степеней, а знаменитый таджикский математик и поэт XI в. Омар Хайям писал: „Алгебра представляет собой научное искусство. Ее предмет — абсолютное (т. е. натуральное, — *А. Ю.*) число и измеримые величины, неизвестные, но отнесенные к чему-либо известному, так что их можно определить... Как известно, алгебраические решения производятся только при помощи уравнений, т. е. приравнивая одни степени другим“.[2] В своих сочинениях математики Средней Азии приводили словесно выраженные правила решения квадратных уравне-

---

[1] Задачи, разрешимые с помощью прямой и круга (плоских мест), древние называли плоскими; задачи третьей степени, для построения которых необходимы были конические сечения (телесные места), — телесными. Все высшие кривые именовались линейными местами.

[2] F. Woepcke. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Paris, 1851, стр. 5—7.

ний, доказывая их с помощью геометрических построений. Выражения корня кубических уравнений в радикалах они не нашли и для построения их корней применяли, вслед за греками, пересечение конических сечений. На этой основе Хайям произвел детальную классификацию кубических уравнений и с большой полнотой рассмотрел вопрос о числе их положительных решений. Впрочем, исследования Хайяма, как и замечательные работы среднеазиатских математиков по приближенному вычислению корней уравнений с численными коэффициентами, в Европе оставались долгое время неизвестными. Зато огромное влияние на развитие европейской математики оказали сочинения аль-Хорезми. По ним средневековые ученые Западной Европы знакомились и с позиционной десятичной нумерацией, распространявшейся из Индии, и с решением квадратных уравнений и их применением к решению различных, в том числе геометрических, задач.[1]

В средневековой Европе алгебра развивалась главным образом в направлении арифметизации, с одной стороны, и выработки буквенного алгорифма алгебраических операций — с другой. Самое начало XVI в. ознаменовано было открытием С. дель Ферро решения в радикалах одного вида трехчленных кубических уравнений, которое вновь нашел в 1535 г. Н. Тарталья. В том же году Тарталья нашел аналогичные правила для решения других трехчленных уравнений 3-й степени, не содержавших члена 2-й степени. В 1545 г. Дж. Кардано опубликовал приемы Тарталья, собственное правило преобразования полного уравнения к форме, не содержащей члена с квадратом, и метод Л. Феррари для решения уравнений 4-й степени. В XVI же веке, несмотря на возражения со стороны некоторых крупных ученых, в математике укореняются отрицательные числа, с которыми впервые встретились алгебраисты Китая и Индии, а также мни-

[1] Подробнее см. мою статью: „О математике народов Средней Азии в IX—XV вв.“. Историко-математические исследования, вып. 4, 1951.

мые числа, возникшие при рассмотрении так называемого неприводимого случая кубического уравнения. Мощный рост приближенных вычислений и составление обширных тригонометрических и затем логарифмических таблиц, наряду с применением десятичных дробей, вводили в математику и вещественное число во всем его объеме, как фактически равноправное с натуральным числом. Оторванная от прежних геометрических толкований, операция возведения в степень при этом подверглась обобщению на произвольные натуральные показатели и почти одновременно на дробные, нулевой и отрицательные.

Успехи были достигнуты и в развитии алгебраической символики, которое частью отражало установление более общих понятий о числе и об операциях алгебры, частью обусловливалось огромным ростом вычислений. Путем сокращения математических терминов или же изобретения специальных значков было введено много конкурировавших между собой символов операций, знаки нескольких первых натуральных степеней неизвестной величины, знак равенства.

Все эти открытия производили чрезвычайно сильное впечатление на умы ученых XVI в. Алгебра все более выступала в их глазах как наиболее мощный математический метод, и постепенно складывалось убеждение, что от применения алгебры в геометрии и тригонометрии и от сочетания их приемов следует ожидать нового усиления математических методов. Обнаруженные общие приемы решения классов задач 2-й, 3-й и 4-й степеней порождали уверенность в существовании еще более общих алгебраических методов, равно пригодных для изучения ранее раздельных категорий непрерывной величины и числа. „Нет сомнения в том, — писал в 1588 г. Б. Перерий, — что существует некая общая математическая наука, которая должна исследовать общие свойства величины и числа и которая, однако, не числится среди математических наук, будучи отличной и от геометрии и от

арифметики“.[1] Такими же идеями руководился и крупнейший алгебраист XVI в. Ф. Виет.

Свое замечательное сочинение по „новой алгебре“ — „Введение в искусство анализа“ (1591) — Виет начинает с того, что подчеркивает именно общность и силу анализа. „Все математики, — писал он, — знали, что под их алгеброй и альмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются целыми десятками с помощью нашего искусства, представляющего поэтому самый верный путь для математических изысканий“.[2] А в заключительных словах „Введения“ утверждалось, что теперь можно будет решить любую задачу — nullum non problema solvere. Для того чтобы достичь этой цели, Виет строит систему математических объектов, частью геометрических, частью псевдогеометрических, операции над которыми весьма отличны от арифметических. Эти объекты-скаляры образуют шкалу, лестницу величин и суть сторона, квадрат, куб, квадрато-квадрат и пр., принадлежащие к различным размерностям — длины, площади, объема, площаде-площади и пр. Сложение и вычитание скаляров подчинено закону однородности, как в античной математике. Умножению чисел соответствует „проведение“ величин, именно — образование нового скаляра, размерность которого равна сумме размерностей сомножителей; делению аналогично соответствует „приложение“ скаляров, при котором размерности вычитаются.

Алгебре скаляров Виет придал желательную степень общности, введя новую символику. Он строит исчисление общих величин, обозначая их каким-либо „видом“ или „формой вещей“, конкретно — буквами алфавита. Данные величины обозначаются прописными гласными: A, E, I, ..., искомые — согласными: B, D, F... На этой основе развивается

[1] Цит. по: И. Тимченко. Основания теории аналитических функций, ч. 1. Одесса, 1899, стр. 104—105.

[2] Цит. по: И. Тимченко, ук. соч., стр. 106.

алгорифм основных операций буквенной алгебры. Введение буквенного коэффициента явилось одной из главнейших заслуг Виета: только теперь становилось возможным строить алгебраическое исчисление как оперативный механизм.

Исчисление скаляров Виета явилось в его трудах основой приложения алгебры к геометрии, и обратно. Одним из ценных результатов такого взаимодействия явилось установление Виетом формул для косинуса и синуса кратных дуг и приложение соотношения

$$(2\cos\varphi)^3 - 3(2\cos\varphi) = 2\cos 3\varphi$$

к решению кубического уравнения в неприводимом случае, т. е. к трисекции угла; это позволяло обойтись без рассмотрения мнимостей. Эти же формулы дали Виету средство решения и уравнений высших степеней, возникающих в задачах о делении угла на 5, 7 и т. д. равных частей. Но Виет даже не поставил более общую проблему алгебраического исследования кривых линий.

Построив первое алгебраическое исчисление, Виет вместе с тем сделал много важных отдельных открытий. Он ввел ряд линейных преобразований корней, установил в несколько отличной от принятой позднее форме связь между корнями и коэффициентами. Свойства уравнений алгебры скаляров Виет переносил на числовые уравнения, для которых применял особую символику и которые строго отличал от первых.

Однако примыкая во многом к античной традиции, Виет невольно ограничил возможности своего аналитического искусства. В его шкале величин не нашли себе места дробные и отрицательные степени; принцип однородности требовал всякий раз введения дополнительных множителей и отягощал аппарат вычислений. Виет отвергал не только мнимые, но и отрицательные числа. Символика его не годилась для высших степеней. Наконец, как ни глубоки были его идеи о шкале величин (позднее своеобразно реализованные в геометрических исчислениях XIX в.), скаляры Виета не составляли

поля и не могли служить основой новой числовой алгебры. Числовая и видовая символическая алгебры, несмотря на сходство управлявших ими механизмов, вели еще раздельное существование. Новое радикальное преобразование алгебры и новое применение ее в геометрии явились уже делом Декарта.

III

Научное мировоззрение и конкретные научные исследования на рубеже XVI и XVII вв., и особенно в XVII в., получили, как известно, новое направление. Для типичных представителей средневековой европейской схоластики (к которым, разумеется, не следует относить людей вроде Р. Бэкона) миропознание сводилось к определению разрозненных „качеств“ вещей с помощью немногих категорий логики. Наука XVI и XVII вв. все более обращалась к активному изучению природы. Служа возвышению энергичной и еще полной веры в свое будущее буржуазии, служа орудием в руках инженеров, химиков, строителей, мореплавателей и артиллеристов, новая наука не могла опираться на изучение старинных богословских и философских авторитетов и на чисто словесное толкование понятий. Напротив, наука нового времени отстаивала в решительной борьбе со старым мировоззрением концепцию изучения мира путем эксперимента, измерения и рациональной обработки материалов наблюдения. Изменяется сама методика опытного естествознания. Технические открытия — зрительная труба, микроскоп, термометр и пр. — позволяют все с большей точностью раскрывать количественные отношения в явлениях природы. Изменяется и методика обработки данных опыта; количественные связи выдвигаются на первый план не только в астрономии, но и в механике и в других отделах физики, ставя перед математикой ряд новых задач.

Характерным устремлением крупнейших мыслителей этой эпохи являлись поиски более совершенных и сильных науч-

ных методов исследования. Представители ряда разных философских систем и различных областей знания были воодушевлены общим желанием выявить научные приемы, гарантирующие от ошибок и бесполезных блужданий, ведущие к истине прямой и верной дорогой. Процесс отпочковывания точных наук от философии в это время еще не был закончен и, как писали Маркс и Энгельс, „метафизика XVII столетия еще заключала в себе *положительное*, земное содержание (вспомним Декарта, Лейбница и др.). Она делала открытия в математике, физике и других точных науках, которые казались связанными с нею".[1]

Задачи общественной практики, в первую очередь механики и оптики, требовали интенсивной разработки математики. Проблемы траектории брошенных тел, задачи гидромеханики, вопросы проведения касательной к траектории снаряда или проведения нормали к поверхности линзы, вычисление размеров криволинейных фигур и их центров тяжести — таков далеко не полный перечень фундаментальных проблем, возникавших на рубеже XVI и XVII вв. В математике поэтому крупнейшие умы того времени видели метод, который необходим для прогресса естествознания, и совершенствование самой математики явилось соответственно неотложной потребностью науки. Математика должна была снабдить естественные науки, особенно механику и оптику, методом изучения зависимостей между переменными величинами. Понятие функции еще не было выделено, — термин этот ввел впервые Лейбниц в конце XVII столетия, — но идея функции уже родилась в исследованиях количественных связей природных явлений и ей нужно было только дать определенное математическое выражение.[2] Движение и его математический экви-

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. III, стр. 155.

[2] В зачаточном виде идея функциональной зависимости и ее графического представления, не подчиненного, однако, определенным количественным законам, имелась у отдельных средневековых философов, например Н. Оресма (ум. в 1382 г.). Введенные Виетом параметры алге-

валент — общая переменная величина — тем легче и быстрее проникали в математику XVII в., что одни и те же люди работали в областях математики и математического естествознания.

IV

Рукописное наследие Декарта от 1618 г. и следующих лет показывает, что уже в молодости его живо интересовали вопросы механики и оптики, астрономии и акустики. В математике он, подобно Галилею, видел универсальный метод изучения материального мира и в значительной мере от математики ожидал, что она поможет человеку стать владыкой природы. Проблемы отвлеченной науки сами по себе имели в глазах Декарта малый интерес; наука и философия предназначены, по Декарту, для усиления мощи человека, для подчинения его воле сил и действий огня, воды, воздуха и других окружающих вещей, для исправления слабостей человеческого организма, для возвышения его характера. Математика, в частности, должна была стать основой физики: „Вся моя физика есть лишь геометрия“, — писал он позднее.[1] Большую заслугу Галилея он усматривал в математическом исследовании физических проблем: „Галилей рассуждает много лучше, чем это обычно делают, — он именно, насколько может, расстается с ошибками школы и старается изучать вопросы с помощью математических рассуждений... Я считаю, что нет другого способа найти истину“.[2]

Идеи математики Декарта переплетались с его концепцией физики. Мировоззрение французского философа не было целостным, но физика его, как и других крупных естество-

---

браических уравнений в сущности также были переменными величинами, но он, как и другие ученые его времени, не трактовал корень уравнения как функцию коэффициентов.

[1] Oeuvres de Descartes, Paris, 1897—1910, т. II, стр. 268.

[2] Там же, т. V, стр. 380. — Впрочем, Декарт не оценил должным образом значения трудов Галилея по механике.

испытателей XVII в., была материалистической и механистической. „В своей *физике*,— писали Маркс и Энгельс,— *Декарт* приписывает *материи* самостоятельную творческую силу и *механическое* движение рассматривает как проявление жизни материи. Он совершенно отделяет свою *физику* от своей *метафизики. В границах* его физики *материя* представляет собой единственную *субстанцию*, единственное основание бытия и познания“.[1] Но природа материи заключается в ее трехмерной протяженности, а все свойства сводятся к делимости и подвижности. При этом под движением Декарт понимал не аристотелево качественное изменение, но „перемещение одной части материи или одного тела из соседства тех тел, которые его непосредственно касались и рассматривались как бы покоящимися, в соседство других тел“.[2]

Идея движения даже первоначальнее и проще, чем идея линии или поверхности, поскольку геометры линию определяют посредством движения точки, а поверхность — посредством движения линии. Поэтому математика призвана была дать общий метод исследования пространственных образов и их движения.

Таким образом, математика для Декарта являлась общей наукой о пространственных образах, их расположении и измерении. Все науки, трактующие о таких объектах, Декарт относил к математическим. „К области математики, — заявлял он, — относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое“. А отсюда он приходил к заключению, что „должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным словом, но старым, уже вошедшим в употребление именем

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. III, стр. 154.

[2] Р. Декарт. Начала философии. Пер. Н. Сретенского. Казань, 1914, стр. 49.

всеобщей математики (Mathesis universalis), ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики“.[1] Однако наличные арифметика и геометрия не обладали в глазах Декарта должной силой метода, и лишь некоторые следы настоящей математики он усматривал в сочинениях Паппа и Диофанта. Создание всеобщей математики Декарт и поставил в центр своих научных занятий.

План всеобщей математики у Декарта начал складываться не позднее 1619 г., т. е. когда ему было около 23 лет. Записи самого Декарта и его знакомого, И. Бекмана, показывают, что главными руководствами Декарта в то время были труды немецких алгебраистов арифметического направления и некоторые сочинения древних; с работами Виета он познакомился много позднее, когда его взгляды сложились достаточно полно. В 1619—1621 гг. Декарт пытается вывести закон падения тел, изучает вопрос о давлении жидкостей, пишет книгу по математической теории гармонии, открывает важное соотношение между числом ребер, граней и вершин выпуклых многогранников, позднее вновь найденное Эйлером. Он занимается также теорией кубических уравнений и построением их корней с помощью механизмов, похожих на мезолабий александрийца Эратосфена, и особое внимание устремляет на проблему решения алгебраических уравнений в целом. В частности, мы встречаем здесь описание механизма для деления угла на произвольное число равных частей и механизма для вставки

[1] Р. Декарт. Правила для руководства ума. М., 1936, стр. 68. Ср. там же: „Все соотношения, которые могут существовать между однородными предметами, приводятся к двум: порядку и мере“ (в правиле 14-м). — В менее отчетливом виде такое определение математических наук имеется в „Метафизике“ Аристотеля (кн. 13, гл. 3), но Аристотель говорил при этом лишь о постоянной мере или отношении. — Ср. материалистическое, но в некотором роде метафизическое и ограниченное понимание предмета математики у Декарта с классическим определением математики, данным Энгельсом: К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. XIV, стр. 39.

любого числа средних пропорциональных, который Декарт позднее описал в своей „Геометрии“ (а в то время применял к решению уравнений 3-й степени).[1]

В замечательном письме от 26 марта 1619 г. Декарт мог уже сообщить Бекману целый ряд глубоких мыслей о разрабатывавшейся им „совершенно новой науке“, которая дает средства общим образом решать любые вопросы относительно как дискретных, так и непрерывных величин. Декарт выражает надежду, что сумеет доказать, что все проблемы в области непрерывных величин сводятся к разысканию пересечения некоторых линий. При этом проблемы разделяются на три класса. Для решения одних достаточно прямых и кругов. Другие можно решить лишь с помощью иных линий, однако таких, которые возникают в результате „единого движения“ и могут быть описаны посредством „новых циркулей“; эти линии, по мнению Декарта, являются не менее геометрическими и точными, чем предыдущие. Наконец, третий класс проблем можно решать только с помощью линий, порождаемых „различными, взаимно не соподчиненными движениями“, вроде квадратрисы. Декарт утверждает, что всякая задача относится к одному из трех указанных классов и ставит перед собой цель установить точнее, какие именно вопросы решаются посредством первых двух типов линий, „после чего в геометрии почти ничего не останется искать“.[2]

В этом гениальном наброске, одним из отправных пунктов которого послужило античное деление геометрических задач и кривых на плоские, телесные и линейные, был ясно намечен ряд основных положений „Геометрии“. В центр дальнейших изысканий были поставлены проблема классификации задач по типу необходимых для их решения кривых и классификация кривых по типу порождающих их движе-

---

[1] Oeuvres de Descartes, т. X, стр. 234—247.

[2] Там же, стр. 156—157.

ний. Первый раздел второй книги „Геометрии“ („Какие кривые линии могут быть допущены в геометрии“) лишь глубже и детальнее развивал идеи, изложенные в этом письме 1619 г.

Шесть или семь лет спустя Декарт открывает закон преломления света, несколько ранее найденный В. Снеллиусом. В поисках линз, преломляющих по этому закону лучи, исходящие из данной точки одной среды в данную точку другой, он сталкивается с проблемой отыскания кривой по свойству ее нормалей, т. е. по существу с первой из обратных задач на касательные, в которых позднее распознали задачу интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Требовалось найти кривую, для которой синусы углов, образуемых нормалью с радиус-векторами, соединяющими точки кривой с источником света и с точкой схода преломленных лучей, имеют данное отношение. Получив с помощью бесконечно малых решение в виде овалов, носящих его имя, Декарт затем доказал это их свойство алгебраически, с помощью изобретенного им приема проведения нормалей и касательных. В черновиках 1629 г. мы встречаем употребление координат. В качестве оси берется прямая, соединяющая три фокуса овала B, C, R; расстояние от вершины A до основания D перпендикуляра, опущенного на ось из любой точки E кривой, обозначается x, а полуразность радиус-векторов CE и RE обозначается y, причем x и y Декарт называет „неопределенными количествами“ и говорит, что „одна из них, остающаяся неопределенной, обозначает все точки кривой, а другая определяется способом, по которому должна быть описана кривая“. Данные линии обозначены буквами a, b.[1] К этому же времени относится геометрическое построение корней произвольного уравнения 4-й степени без второго члена с помощью параболы и окружности, уравнения которых мы бы записали в виде $x^2=y$ и

$$\left(x-\frac{q}{2}\right)^2+\left(y-\frac{p+1}{2}\right)^2=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2+r.$$

[1] Oeuvres de Descartes, т. X, стр. 310.

Декарт отмечает, что число действительных корней равно числу общих точек кривых. Отсутствие точек пересечения означает, что уравнение не имеет „истинных“ (verae) корней, но только „воображаемые“ (imaginariae). Истинные корни подразделяются на „явные“ (explicitae) и „неявные“ (implicitae), т. е. положительные и отрицательные, и Декарт указывает, как располагаются отрезки, выражающие те и другие корни.[1] Все это вошло в состав „Геометрии“.

Еще два года спустя Декарт сделал новый шаг вперед в классификации плоских кривых. В конце 1631 г. голландский ученый Я. Гооль обратил внимание Декарта на задачу Паппа о геометрическом месте к 4 n прямым. В письме от января 1632 г. Декарт сообщил Гоолю резюме своего решения.[2] При любом числе данных прямых искомые точки лежат на кривой, описываемой единым непрерывным движением. Такие кривые определяются с помощью „простых отношений“, именно геометрических отношений, другими словами, степеней; по числу отношений, другими словами, по степени, их можно разбить на роды. К первому роду Декарт отнес конические сечения, решающие задачу в случае не более, чем 4 прямых, ко второму — линии не выше 4-й степени, возникающие в случае не более, чем 8 прямых, к третьему — кривые не выше 6-й степени, и т. п. К этому Декарт добавил неверное, вообще говоря, утверждение, что всякая кривая рода n может служить местом к 4 n прямым (эта ошибка была повторена и в „Геометрии“). Таким образом, в 1632 г. Декарт предложил классификацию алгебраических плоских кривых — одно из последних недостававших звеньев его всеобщей математики.

---

[1] Oeuvres de Descartes, т. X, стр. 344—346.

[2] Там же, т. I, стр. 232—235.

Наконец, около 1629 г. Декарт существенно продвинулся и в реформе основ алгебраического алгорифма. Для представления общей непрерывной величины и ее степеней он решил воспользоваться, как это делал ранее Виет, геометрическим образом. Однако, в отличие от Виета, построившего лестницу скаляров, он, после некоторых поисков, счел целесообразным ограничиться представлением величин отрезками; а для обозначения последних стал применять строчные буквы латинского алфавита — начальные для данных и конечные для искомых или переменных. Ход мыслей Декарта отчетливо выражен в „Рассуждении о методе“, где он писал: „Я видел, что хотя их предметы различны, тем не менее все они согласуются между собой в том, что исследуют только различные встречающиеся в них отношения или пропорции, поэтому я решил, что лучше исследовать только эти отношения вообще и искать их только в предметах, которые облегчили бы мне их познание, нисколько, однако, не связывая их этими предметами, чтобы иметь возможность применять их ко всем другим подходящим к ним предметам. Затем, приняв во внимание, что для лучшего познания этих отношений мне придется рассматривать каждое соотношение в отдельности и лишь иногда удерживать их в памяти или рассматривать сразу несколько, я предположил, что для лучшего исследования их в отдельности надо представлять их в виде линий, так как не находил ничего более простого или более наглядно представляемого моим воображением и моими чувствами. Но для того чтобы удерживать их и рассматривать одновременно по нескольку, требовалось выразить их возможно наименьшим числом знаков. Таким путем я заимствовал бы все лучшее из геометрического анализа и из алгебры, и исправлял бы недостатки одного с помощью другой“ (23—24).[1]

---

[1] Цифры в круглых скобках означают страницы настоящего издания.

В результате, как видно, за много лет до выхода „Геометрии“ Декарт владел уже концепцией той новой науки, над созданием которой начал трудиться около 1619 г. Основные черты всеобщей математики были таковы. Все задачи математических наук могут быть выражены с помощью уравнений той или иной степени. Общий метод решения уравнений состоит в построении их корней как отрезков — ординат точек пересечения некоторых плоских кривых. Эти плоские кривые выражаются алгебраическими уравнениями с двумя текущими координатами и сами выступают как геометрические образы алгебраических функций. Классификация линий играла решающую роль при выборе кривых, нужных для построения задачи. Буквенное исчисление отрезков сливалось в органическое целое с геометрией линий, и только синтез их давал универсальный метод решения проблем в области непрерывных величин. Исторически, однако, из всеобщей математики Декарта выросли две науки: числовая буквенная алгебра и аналитическая геометрия. Даже в рассматриваемом труде Декарта изложение обеих наук велось в основном раздельно и только в начале (построение исчисления отрезков) и в конце (решение уравнений 5-й и 6-й степеней) они выступали в слитном единстве.

V

Основным элементом декартовой алгебры, как уже говорилось, являлся отрезок. „Геометрия“ и начинается с разъяснения операций над отрезками. При этом Декарт строит поле отрезков, изоморфное полю вещественных чисел. Для этого вводится единичный отрезок, и операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня приводятся к разысканию пропорциональных отрезков. Так, произведение двух отрезков — a и b — представляет собой отрезок c, отношение которого к a равно отношению отрезка b к единичному отрезку I. Геометрическое построение произведе-

ния опирается при этом на теорию подобия и, в конечном итоге, основывается на эвдоксовой теории отношений. Для построения корня любой степени Декарт использует механизм, изобретенный им еще около 1619 г. В новой алгебре закон однородности автоматически выполнялся сам собой, и буквенное исчисление уже не страдало от необходимости введения дополнительных коэффициентов: члены любого равенства или выражения можно было подразумевать помноженными или поделенными на I такое число раз, какое требуется для линейности.

Выражение величин отрезками, а не числами связано было с недостаточной еще полнотой самого понятия о числе. Хотя математики уже давно свободно обращались с любыми вещественными числами, но под числом продолжали, следуя античной традиции, понимать меру дискретного множества, т. е. число натуральное и иногда еще дробь. Так, комментатор Декарта Ф. Дебон подчеркивал, что общие отношения величин нужно рассматривать как отношения отрезков, ибо „этого не дают числа, которые не в состоянии выразить отношения, имеющиеся между несоизмеримыми количествами“.[1]

Трактуя фактически всякое количество как отрезок и введя отрезок — единицу, Декарт подводил к новому определению вещественного числа, которое через полвека сформулировал Ньютон.[2] Алгебра отрезков Декарта строилась в результате как числовая.

О тенденции Декарта еще решительнее освободить алгебру от геометрических элементов свидетельствует небольшое сочинение — „Исчисление г. Декарта“, — написанное кем-либо из его последователей и самим Декартом рекомендовавшееся в качестве введения к его „Геометрии“. В этом введении, рукопись которого была найдена в конце

[1] Geometria R. des Cartes, 1695, ч. I, стр. 107.

[2] Ср. стр. 302—303, 336, 377—378 этого издания.

прошлого века, излагаются правила буквенного исчисления вне всякой связи с геометрическими построениями или истолкованиями: правила сложения и вычитания, умножения и деления, действий с дробями и радикалами. Декарт видел в алгебре не только, говоря по-современному, учение о разыскании корней целых рациональных функций (что было и оставалось долгое время главной ее целью), но и учение об общих свойствах алгебраических операций (что было и оставалось долгое время только вспомогательным средством). Это, однако, не дает никаких оснований вслед за П. Бутру усматривать в алгебре Декарта „чистую технику" и систему „условных определений", лишь недостаточно детально исследованных Декартом.[1] Декарт строил операции своей алгебры по подобию операций арифметических и геометрических, которые, в свою очередь, должны были выражать реальные связи вещей реального мира.

Декарт не ограничился расширением области чисел любыми положительными. По-иному он ввел в алгебру и отрицательные числа, хотя именовал их в своем сочинении „ложными корнями". Рассмотрение направленных отрезков ординат (не абсцисс!) дало, наконец, отрицательным числам истолкование, которое вскоре им обеспечило почти общее признание. Мнимые числа играли у Декарта чисто формальную роль, служа признаком невозможности задачи и символом, позволяющим формулировать общую теорему о числе корней алгебраического уравнения.[2]

Основные теоремы алгебры Декарт изложил в третьей книге „Геометрии". Изложение теории уравнений он начинает с важного замечания, что их удобнее записывать с правой частью, равной нулю: это было необходимо для формули-

[1] P. Boutroux. L'idéal scientifique des mathématiciens. Paris, 1920, стр. 96—100. — „Исчисление г. Декарта" есть в русском переводе, см.: Р. Декарт. Геометрия. М.—Л., 1938, стр. 117—137.

[2] Аналогично трактовал отрицательные и мнимые корни современник Декарта А. Жирар в „Новом открытии в алгебре" (1629).

ровки свойств симметрических функций корней, правил знаков, общих выражений корней в радикалах и пр. Далее он рассматривает составление уравнений путем перемножения линейных двучленов. Этот прием позволяет ему формулировать свойство делимости многочлена на разность $x-a$, где a — корень, теорему о числе корней уравнения (дополненных в случае нужды мнимыми корнями) и известное правило знаков Декарта для определения числа положительных корней. Далее приводятся преобразования корней, ставится вопрос о границах действительных корней и дается новое решение уравнения четвертой степени путем разложения на квадратичные множители и открытого Декартом способа неопределенных коэффициентов. Весьма важно также утверждение, что если уравнение с целыми коэффициентами и старшим из них, равным единице, не имеет целых корней, то оно не имеет и дробных. Особый интерес представляет постановка проблемы приводимости, т. е. представления целой рациональной функции в виде произведения двух аналогичных функций. Декарт указал, что корни кубического уравнения с целыми коэффициентами и старшим из них, равным единице, строятся с помощью циркуля и линейки (т. е. уравнение разрешается в квадратичных радикалах), в том и только в том случае, если уравнение имеет целый корень, и что для разрешимости теми же средствами уравнения 4-й степени его кубическая резольвента должна быть приводимой. Доказано было это только 200 лет спустя П. Ванцелем.

Все эти теоремы имели одно назначение — способствовать разысканию корней уравнений. Но общим методом решения этой задачи оставалось геометрическое построение корней. В конце сочинения дается детальный разбор такого построения уравнений 5-й и 6-й степеней с помощью окружности и предложенной Декартом кривой третьего порядка (так называемая парабола Декарта или трезубец Ньютона). Декарт не пошел в этом вопросе по пути создания прибли-

женных числовых методов. Декарт удовлетворился и принужден был удовлетвориться в общем случае геометрическим построением, которое вполне соответствовало декартовой концепции числа и в теоретическом смысле позволяло совершенно строго решать задачи. Выбор кривых при этом определялся главным образом требованием применять кривые возможно низшей степени и опирался на классификацию линий, приведенную во второй части сочинения.

VI

Приложение алгебры к геометрии Декарт основывает прежде всего на замечании, с которого и начинается его сочинение, о том, что „все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий". Геометрические построения сопрягаются в исчислении отрезков с операциями арифметики. Поэтому для решения задач геометрии следует итти обычным в алгебре путем: обозначить данные и искомые буквами и составить уравнения. Если уравнение содержит одну неизвестную, то возникает проблема его решения, если две, то является вопрос о его геометрическом смысле, т. е. о геометрической интерпретации алгебраической функции.

Изложение геометрических отделов труда Декарта было далеко от строгой последовательности и не имело в виду удобства читателя.[1] Мы позволим себе отойти от него и начнем с одного из главных вопросов: какие линии вообще, по Декарту, относятся к области геометрии? Древние, — говорит Декарт (это мнение его не подтверждается, впрочем,

---

[1] Беспорядочность структуры „Геометрии" признавал сам автор, советуя после первой книги читать более легкую третью, ранее второй, содержащей приложение алгебры к геометрии. См.: Oeuvres de Descartes, т. II, стр. 22—23.

достаточно убедительно),[1] отличали геометрические линии от механических, описываемых различными приборами, — вроде циссоиды, конхоиды, спирали, квадратрисы. С таким делением Декарт не был согласен. Кинематическое образование линий его не отпугивало, — напротив, он положил его в самый фундамент учения о кривых. Изгнание механизмов нельзя мотивировать их большей сложностью, чем линейка и циркуль. Геометрия преследует не точность чертежа, но точность рассуждений. И если считать геометрическим то, что определенно и точно, то в геометрии должны быть допущены все линии, которые описываются „непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру“. Напротив того, исключению подлежат линии вроде спирали Архимеда и квадратрисы, которые „представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить“ (321). Несколько далее Декарт описывает уже упоминавшийся шарнирный механизм, позволяющий строить любое число средних пропорциональных.

Указанный кинематический признак деления всех плоских кривых на геометрические и механические не был здесь сформулирован еще с достаточной математической четкостью. Декарт сейчас же облекает его, однако, в более осязательную аналитическую форму, вводя прямолинейные координаты. Выбрав какую-либо прямую за ось координат и направление второй оси (ее на чертежах Декарта нет), он без доказательства утверждает, что все точки геометрических линий „обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии“ (323). В этом

---

[1] См.: P. Tannery. Mémoires scientifiques. Paris, 1912, т. II, стр. 10—11.

поистине замечательном по идейной глубине месте своего сочинения Декарт сразу вводит и метод координат, и понятие о функции как аналитическом выражении кинематически построенной кривой и об алгебраических и трансцендентных (по терминологии Лейбница) кривых. Тут же дается классификация алгебраических кривых по родам (Декарт в связи с уже знакомым нам решением задачи Паппа и с тем, что решение уравнений 4-й степени сводится к кубическим, неудачно объединяет в n-ый род кривые порядка $2n-1$ и $2n$) и, опять-таки без доказательства, формулируется фундаментальное положение об инвариантности рода кривой при линейных преобразованиях координатной системы. Стоит отметить, что в своей кинематической классификации кривых Декарт предвосхитил одну из главных теорем кинематики механизмов, гласящую, что с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движения остальных, можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Эта теорема была доказана только в 1876 г. А. Кемпе.[1]

Исключение механических кривых связано было с тем, что общим методом исследований Декарта являлась алгебра; к этому вопросу мы еще вернемся позже.

В качестве примеров употребления координатного метода Декарт выводит уравнение одной гиперболы и, несколько дальше, „трезубца“, а также производит детальный разбор задачи Паппа в случае четырех прямых. При этом он путем преобразований в косоугольной системе координат показывает, что общее уравнение 2-й степени принадлежит коническому сечению или вырождается — при исчезновении старших членов — в прямую. В этой части исследования он существенно опирается на свойства конических сечений, известные из труда Аполлония. Декарт дает также решение задачи Паппа в одном частном случае для пяти линий (произведе-

[1] На это обстоятельство обратила мое внимание С. А. Яновская.

ние расстояний до трех параллельных прямых пропорционально произведению расстояний до двух других, из которых одна параллельна первым трем), получая при этом уравнение упомянутого трезубца. В одном месте он дает и полный разбор уравнения 2-й степени с численными коэффициентами.

Во второй книге „Геометрии“ Декарт изложил другое свое капитальное открытие: алгебраический прием проведения нормалей к плоским кривым. Для этого он, применяя изобретенный им метод неопределенных коэффициентов, выводит условие слияния в одну точку двух точек пересечения кривой с окружностью, проходящей через данную точку кривой и имеющей центр на оси абсцисс. Такой прием прилагается к эллипсу, конхоиде и овалам. Задаче о нормалях Декарт придавал особенное значение, говоря, что она „является наиболее полезной и общей не только среди известных мне, но также среди всех тех задач, которые я когда-либо желал знать в геометрии“ (342). Наконец, последний раздел второй книги „Геометрии“ содержал весьма скупые (и в одном пункте даже неточные) указания относительно возможности изучать пространственные кривые, проектируя их на две взаимно перпендикулярные плоскости.

Таким образом, Декарт действительно применил реформированную им алгебру к геометрии. К нему восходит создание координатного метода в геометрии (хотя в астрономии и географии координаты применялись ранее), классификация (правда, несовершенная) линий, вывод первого уравнения кривой третьего порядка, общая постановка задачи об изучении геометрических свойств линий по аналитическим свойствам их уравнений и о сведéнии всех геометрических вопросов к решению уравнений.[1] Но творец аналитической геометрии

[1] Примером такого вопроса является задача вставить между сторонами прямого угла отрезок данной величины так, чтобы его продолжение прошло через данную точку на биссектрисе этого угла. Декарт разбирает эту задачу в третьей части сочинения и приводит ее к уравнению 4-й

не провел арифметизацию своего „геометрического исчисления“ далеко. Опорным пунктом изучения конических сечений оставались известные от древности симптомы, и изучение кривых по уравнениям было едва лишь начато. Для Декарта аналитическое рассмотрение самих конических сечений не представляло интереса, ибо их свойства были и без того достаточно изучены. Область фактически рассмотренных Декартом кривых затрагивала лишь отдельные высшие кривые (трезубец; кривые, описываемые упоминавшимся механизмом; овалы — линии четвертого порядка; в переписке — Декартов лист). Несовершенной была и координатная система Декарта, в которой из-за отсутствия второй оси координаты лишены были полного равноправия; отрицательные абсциссы не рассматривались. Эти пробелы не помешали, впрочем, огромному влиянию „Геометрии“ на современников и потомков.[1]

Характеристика математического творчества Декарта была бы неполной, если бы мы ограничились рассмотрением только „Геометрии“. В своей переписке Декарт дал решение и ряда других актуальных задач, в том числе задач, требовавших применения бесконечно малых. Так, он нашел квадратуры парабол высших порядков $y=x^n$ и объемы тел вращения их сегментов, определил для этих площадей и объемов центры тяжести и построил касательные к параболам. С помощью метода неделимых он дал квадратуру циклоиды, а опираясь на идею о мгновенном центре вращения построил касательные к обыкновенной, укороченной и удлиненной циклоидам. Он далее исследовал свойства открытой им логарифмической

степени, разрешимому в квадратичных радикалах. Этой задачей занимались также Жирар и позднее Ньютон („Всеобщая арифметика“, задача XXIV).

[1] Одновременно с Декартом и самостоятельно пришел к созданию аналитической геометрии Ферма, применявший алгебру Виета. Свои результаты Ферма изложил во „Введении в изучение плоских и телесных мест“, которое было опубликовано только в 1679 г., — до того оно было известно по рукописям. См. русский перевод: Р. Декарт. Геометрия, стр. 137—154.

спирали и дал приближенное построение и описание свойств кривой, определенной свойством касательных, которые мы бы записали уравнением $by' = x - y$ (так называемая задача Дебона). В полемике с Ферма он обсуждал предложенный последним метод максимумов и минимумов и метод касательных и хотя допустил при этом сперва некоторые ошибки, но в результате спора и сам получил некоторые интересные результаты.

Декарт хорошо понимал, что его алгебраический метод не может, вообще говоря, служить для решения подобных задач. Но он оставался при убеждении, что этот метод есть единственный универсальный прием математики. „Я не думаю, — говорил он, например, по поводу задачи Дебона, — чтобы возможно было найти общим образом правило, обратное моему правилу для касательных или же правилу, которым пользуется г. де Ферма“.[1] А ту область, в которой действуют методы алгебры, он считал исследованной им в достаточной мере, гордо замечая, что „ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий“ (367). С такой же уверенностью он заканчивал „Геометрию“ словами: „Я надеюсь, что наши потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им самим удовольствие найти это“ (408). Потомство действительно высоко оценило гениальные новаторские идеи Декарта, но оно же весьма скоро подвергло справедливой критике метафизическую ограниченность его „всеобщей математики“.

Для распространения идей Декарта главное значение приобрели четыре латинских издания „Геометрии“, первое из которых вышло в 1649 г. В этих изданиях, особенно начиная со второго (1659—1661), к тексту Декарта были приложены совершенно необходимые для понимания его трудного сочинения комментарии и ряд дополнений Ф. Скаутена, Ф. Дебона, Э. Бартолина, Я. де Витта, И. Гудде и других,

---

[1] Р. Декарт. Геометрия, стр. 192.

существенно развивавших далее и алгебру, и аналитическую геометрию конических сечений. Работы этих и других прямых последователей Декарта, вплоть до М. Ролля, тщетно боровшегося на рубеже XVII и XVIII вв. с идеями дифференциального исчисления, показывают, однако, что картезианцы продолжали верить в универсальность метода своего учителя. Более глубокое развитие и алгебра, и аналитическая геометрия нашли не в школе Декарта, а у Ньютона и Лейбница, преодолевших слабые стороны „всеобщей математики".

Лейбниц, например, высоко оценив открытия Декарта и Виета, писал: „...чтобы сохранить за своим методом всеобщность и достаточность, г. Декарт счел подходящим исключить из геометрии все задачи и все линии, которые нельзя подчинить этому методу, под тем предлогом, что все это лишь механика. Но так как эти проблемы и эти линии могут быть построены или представлены при помощи некоторых точных движений, так как они имеют важные свойства и так как ими часто пользуется природа, то можно сказать, что он здесь допустил ошибку, подобную той, в какой упрекал некоторых древних, ограничившихся построениями, в которых требуется только линейка и циркуль, как если бы все прочее относилось к механике".[1]

Именно Ньютон и Лейбниц оказались лучшими продолжателями начатого Декартом дела. Декарт заложил надежный фундамент нового алгебраического исчисления и ввел в математику алгебраическую функцию. Ньютон и Лейбниц в их исчислении бесконечномалых, которое включало и представление функций степенными рядами, заложили фундамент нового алгорифма, позволившего подвергнуть систематическому исследованию неизмеримо более обширный класс аналитических функций. Вместе с тем и общие идеи Декарта, и частные его результаты оказали мощное влияние на все последующее развитие математики, в том числе на творчество

[1] См.: Успехи математических наук, т. III, вып. 1, стр. 165.

Лейбница и Ньютона. Так, лейбницевы поиски „всеобщей характеристики“ — этого исчисления понятий, с которым было тесно связано открытие дифференциального и интегрального исчисления, — примыкали к декартову построению „всеобщей математики“, и образцом, который стоял при этом перед Лейбницем, являлся алгорифм буквенной алгебры.

Алгебра и аналитическая геометрия Декарта получили прямое продолжение в работах Ньютона. Во „Всеобщей арифметике“ (1707) Ньютон, несмотря на резкую критику своего предшественника в некоторых принципиальных пунктах, во многом отправлялся от „Геометрии“. Он отказывается от плана создания всеобщей математики на алгебраической основе, но создает всеобщую арифметику, и при этом энергично проводит в жизнь тенденции арифметизации алгебры, явственно наметившиеся у Декарта. Алгебра отрезков, в которой такую роль играло геометрическое построение корней, преобразуется в числовую алгебру. Для этого с самого начала формулируется определение вещественного числа как отвлеченного отношения произвольной величины к однородной с ней, принятой за единицу. Для решения численных уравнений предлагаются эффективные приемы вычисления их корней с любой степенью приближения, а за построением корней сохраняется скромная роль вспомогательного графического приема, полезного иногда для отыскания первых двух-трех цифр корня. При этом Ньютон отверг принцип Декарта — применение кривых с уравнениями возможно более низких степеней, поставив на его место практическое требование удобства описания кривых, которому вполне могут удовлетворять и некоторые трансцендентные линии. Во многих местах „Всеобщей арифметики“ Ньютон отправлялся от Декарта или его комментаторов. Он несколько совершенствует символику Декарта, дает новую теорему о числе действительных и мнимых корней уравнения, исследует границы действительных корней, продвигает далее изучение проблемы приводимости. В теории рядов он, как

и Лейбниц, впервые дал широкое применение способу неопределенных коэффициентов, о котором сам Декарт в „Геометрии“ прозорливо писал, что прием этот „может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и является не из последних в применяемом мной методе“ (351).[1]

В той же „Всеобщей арифметике“, значительный отдел которой отведен был алгебраическому решению многочисленных задач геометрии, и особенно в „Перечислении кривых третьего порядка“ (1704), Ньютон продолжил работу Декарта над созданием аналитической геометрии. Он внес полную ясность в вопрос о знаках координат, дал современную классификацию алгебраических кривых и впервые исследовал почти во всех деталях новый большой класс кривых третьего порядка. Учение о конических сечениях аналитически изложено было, впрочем, лишь во второй части „Введения в анализ“ Эйлера (1749).

Интересно отметить, что и Ньютон и Лейбниц усмотрели в аналитической геометрии Декарта еще одну ограниченность. Приложение алгебры к геометрии Ньютон считал чуждым истинному духу геометрических доказательств и лично предпочитал синтетические доказательства, блестящие образцы которых можно найти в „Математических началах натуральной философии“ и которыми он, видимо, пользовался и в „Перечислении кривых третьего порядка“ (сочинение это было опубликовано без доказательств). Лейбниц также считал метод координат чуждым геометрии как таковой. „Я, — писал он, — еще недоволен алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений“; он полагал, что следует создать чисто геометрический анализ, который бы столь же непосредственно выражал положение, как алгебра выражает величину. Эти идеи Ньютона и Лейбница реализованы были много позднее в проективной геометрии и различных геометрических исчислениях XIX в.[2]

[1] Ср. мою статью, приложенную к переводу „Всеобщей арифметики“ Ньютона, М., 1948.

[2] См.: Успехи математических наук, т. III, вып. 1, стр. 198 и сл.

„Геометрия“ Декарта определила развитие алгебры и аналитической геометрии на долгое время. В этих областях ученые XVIII в. работали преимущественно в направлениях, намеченных автором „Рассуждения о методе“. Только в начале XIX в. и алгебра и геометрия вступили в новую, более высокую стадию развития: алгебра соединяет свою судьбу с теорией групп, а геометрия преобразуется в общее учение о многомерных пространствах. Но мы не должны забывать, что исходным пунктом математики XIX столетия были плодотворные идеи Декарта о переменной величине и функциональной зависимости, о синтезе числа и протяжения — арифметики и геометрии — и о значении математических алгорифмов.

А. П. Юшкевич.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

К „Диоптрике“

[1] (к стр. 69). Вопрос об изобретении зрительных труб принадлежит к тем, которые возбудили наибольший интерес среди историков физики последних столетий. Даже в настоящее время нет полного единодушия относительно того, кто является истинным изобретателем. Несомненно, что случай позволил не одному пытливому исследователю, обладающему очковыми линзами, — а они появились еще в XIII в. и в XV в. были всем известны, — открыть зрительную трубу; Леонардо да Винчи в своих трудах описывает как однолинзовый телескоп (т. е. телескоп без окуляра, в котором последний заменяется глазом), так, повидимому, и настоящую трубу из двух линз. Известны и другие аналогичные открытия, причем для всех характерно то полное отсутствие интереса, которое они вызывали у своих авторов, рассматривающих эти трубы как курьезные игрушки. Согласно изысканиям Данжона и Кудэ, приоритет открытия принадлежит Жан-Баттиста делла-Порта, хотя последний, повидимому, не придавал зрительной трубе больше значения, чем занимательной безделушке. Схема построения зрительной трубы была известна Порта уже в 1580 г.; такие трубы изготовлялись в Италии в 90-х годах XVI ст., вероятно, по его идее, но по военным соображениям держались в секрете. Слухи об этих трубах вместе с некоторыми конкретными указаниями дошли до голландских оптиков из Миддельбурга. Захариас Янсен первым стал изготовлять и продавать такие трубы; его примеру последовал другой оптик этого города, его сосед, Ганс Липпергей, каким-то образом выведавший о работе Янсена. Секрет зрительной трубы стал постепенно распространяться по Голландии и дошел до упомянутого Декартом Якова Меция. Любопытно, что это изобретение вернулось на родину только много лет спустя и попало в руки Галилея; с этого момента началась новая эра в оптике.

Более подробно об этом вопросе см. весьма интересную статью С. И. Вавилова в сборнике „Галилео Галилей“, под ред. А. М. Деборина (1943).

[2] (к стр. 70). Ссылки Декарта на неправильность и неопределенность гипотез в астрономии становятся понятными, если вспомнить, что в то время, когда он писал свою „Диоптрику“, спор между сторонниками теории Коперника и ее противниками еще не мог считаться решенным, хотя все наиболее передовые ученые того времени склонялись на сторону Коперника.

Это место очень характерно для „философа в маске“. „Диоптрика“ составлялась автором в неспокойное время: начатая за несколько лет до осуждения Галилея, она была закончена, когда Декарт пребывал еще под впечатлением этого устрашающего события. Будучи сам убежденным сторонником теории Коперника и лишенный возможности признать это из страха перед возможными последствиями, а также отрицать, потому что слишком многим его убеждение было известно, он избегает каких бы то ни было определенных высказываний на этот счет. Рассматриваемое суждение об астрономах может служить образцом такой компромиссной манеры: не цитируя ни одной фамилии, Декарт ограничивается общими словами об ошибочных гипотезах в астрономии, указывая, что и они приносят пользу.

[3] (к стр. 71). До конца XVII в., когда Ромер на основании своих наблюдений над спутниками Юпитера доказал конечную скорость распространения света, мгновенное распространение последнего считалось очевидным. Впрочем, Галилей сомневался в этом и попытался опытным путем измерить скорость света.

Опыт, проведенный на расстоянии в одну милю тогдашними средствами, естественно, дал отрицательный результат, который, впрочем, не разубедил Галилея в его мнении о конечной скорости света. Все же большинство ученых держалось противоположного взгляда и для подтверждения его пользовались подчас весьма странными аргументами. (См.: Г. Галилей. Беседы и математические доказательства. Русский перевод Долгова: 1943, стр. 110 и сл.).

[4] (к стр. 71). Такое определение цветов по существу нельзя признать неправильным, но оно мало плодотворно. Декарт правильно описывает роль самих тел, рассеивающих свет, но он упускает из виду, или, точнее, не знает, что цвет зависит от источника света. Через полвека Ньютон открыл дисперсию света и сложный состав дневного света, — это был следующий шаг в теории цвета. Роль приемника световой энергии — глаза — в процессе ощущения цветов была исследована лишь в XIX в

[5] (к стр. 72). В этом месте Декарт высказывается против существования частичек или корпускул, переносящих свет, и является здесь

сторонником теории передающей среды, которую он нигде не называет (если исключить одно упоминание слова „эфир" в письме Мерсенну от 8 октября 1629 г. в связи с вопросом о разрежении воздуха). К вопросу об этой среде он возвращается в письме к тому же Мерсенну от 15 апреля 1630 г., отвечая на некоторые вопросы последнего: „Эти маленькие частицы, которые входят, когда тело разрежается, и выходят, когда тело сгущается, и проходят через самые твердые предметы, состоят из одной материи, общей всему тому, что зримо и ощутимо; не следует их рассматривать ни как атомы, ни как твердые тела, но как субстанцию в высшей степени текучую и субтильную, заполняющую поры других тел... Тепло и разреженный воздух представляют собой не что иное, как смесь с этой материей". Упоминание об атомах встречается в III главе „Трактата о свете". „Если вы постараетесь проследить за теми маленькими телами, которые обычно называют атомами и которые видны в лучах Солнца, то увидите, что они беспрестанно летают и так, и этак, и тысячами разных способов, хотя нет никакого ветра, который бы их приводил в движение". В письме к своему другу Ренери от 2 июня 1631 г. Декарт дважды упоминает об эфире, сравнивая воздух с шерстью, а эфир, заполняющий поры воздуха, с вихрями ветра, дующего внутри этой шерсти.

Более полные сведения о взглядах Декарта на эфир и атомы можно получить в первых главах „Трактата о свете", (Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950), а кое-что повторяется в первой главе „Метеоров".

Для понимания дальнейшего достаточно представить себе эфир в виде несжимаемого, бесконечно упругого тела, заполняющего все поры тел и передающего мгновенно движения или стремления к движению, происходящие в светящихся телах. Впрочем, такие взгляды уже ранее встречались у греческих философов.

6 (к стр. 72). У Декарта познавательные образы — Espèces intentionelles. По Демокриту, все предметы излучают постоянно вокруг себя образы, повторяющие их внешний вид в сильно уменьшенном размере. Эти частицы-образы проникают в тело через органы чувств и запечатлеваются в душе. Отпечатки, схожие с предметом, создают зрительные, а может быть, и другие впечатления. (Не безинтересно отметить, что слова „впечатление" и „отпечаток" имеют общий корень: как видно, идеи Демокрита не лишены наглядности).

Учение Демокрита было использовано и искажено Аристотелем; согласно последнему, все объекты, которые мы себе мысленно представляем, проникают в наше сознание через органы чувств не непосредственно, но в виде образов, т. е. изображений предметов, лишенных всякой материи: так, воск воспринимает след печати, хотя последняя не оставляет на нем никаких материальных частиц.

Эти представления почти без всяких изменений дошли до современников Декарта — Гоббса и Гассенди, которые развивали их, не внося существенных исправлений. Декарт объявил себя решительным противником этих воззрений.

[7] (к стр. 72). Среди древних философов, как Евклид, Птоломей, современников и последователей Демокрита (V в. до н. э.), существовало мнение, что глаза излучают лучи, ощупывающие предметы и передающие обратно зрительные ощущения. Демокрит, а позже сам Аристотель, восставали против этой теории и полагали, что свет излучается рассматриваемыми предметами. Поэтому представляется несколько удивительным, что Декарт двадцать веков спустя высказывает такие же взгляды, по крайней мере по отношению к зрению ночных зверей, у которых, по его мнению, глаза содержат определенный запас света.

[8] (к стр. 74). Достойно внимания, что Декарт подчеркивает различие между движением и „стремлением“ к движению. Это представляет собою следующий шаг по пути к эфиру. Все же было бы поспешным причислить Декарта к предшественникам волновой теории, как это будет доказано в дальнейшем: закон преломления выводится им из соображений, заимствованных из чисто корпускулярных воззрений (стр. 78 и след настоящего издания). Впрочем, желая избегнуть упрека в непоследовательности, Декарт пишет, что „действие или стремление к действию должно следовать тем же законам, что и движение“. Это дает ему возможность заменить свою неопределенную разреженную среду — прообраз эфира — движением мячей, основные свойства которых хорошо известны.

[9] (к стр. 86). Это описание явления преломления света через поверхность, разделяющую две среды, и сопровождающих его процессов отражения, рассеяния и поглощения, если исключить все то, что относится к цвету, по существу, если не по форме, мало отличается от современного изложения и не лишено наглядности.

Декарт заканчивает свое знаменитое доказательство закона преломления указанием, что пропорциональность имеет место между синусами углов падения и преломления, а не между самими углами, как это обычно предполагали ранее. Впрочем, уже из таблицы Птоломея, приведенной в конце этого примечания, явствует, что пропорциональность между углами соблюдается лишь при малых углах, а при больших имеются значительные отступления от пропорциональности. Кеплер также совершенно точно знал, что нет пропорциональности между углами, так как ему было известно о полном внутреннем отражении, но при своих рассуждениях он исходил из этой пропорциональности для простоты выкладок.

Вся цепь рассуждений Декарта проведена в духе физики XVIII—XIX вв., а моментами, можно даже сказать — в духе современной физики, лишь старинный слог и характерная для XVII в. манера изложения выдают истинную эпоху, когда Декарт писал свою „Диоптрику". Интересно для контраста читать произведения современников его, большинство которых находилось в значительной степени во власти схоластики и предрассудков. С этой целью следует перелистать книгу одного из наиболее крупных и передовых умов того времени, уважаемого Декартом (их было весьма мало) Кеплера, которого он звал своим учителем, книгу, известную под названием „Ad Vitellionem Paralipomena, seu astronomiae pars optica" („Дополнения к Вителлию, или оптическая часть астрономии", 1604). Об этой книге, по рассказу французского каноника Жана Тарда, посетившего Галилея, последний, на вопрос, заданный ему относительно преломления лучей и изготовления объективов, ответил, что эта наука еще мало развита и что излагал ее только Кеплер, математик императора, написавший об этом особую книгу, но настолько темную, что автор, повидимому, не понимал сам себя. Впрочем, справедливости ради необходимо добавить, что несколько лет позже Кеплер написал свою „Диоптрику", представляющую в некоторой степени новое издание „Paralipomena", выбросив из последней всю магию и схоластику. Обе „Диоптрики" — Кеплера и Декарта — являлись редкими исключениями в эту переходную эпоху.

По существу доказательства следует обратить внимание на следующее: аналогия с мячом действительно приводит к закону синусов, но приходится ее автору прибегнуть к мало убедительным рассуждениям, чтобы доказать, что в более плотной среде угол луча с нормалью меньше (а не больше), чем в менее плотной. Однако это обстоятельство практического значения не имеет, так как отношение показателей всегда определяется из измерений.

Несколько слов об исторической стороне вопроса, поскольку он вызвал страстные споры. Закон преломления был открыт голландским математиком и физиком Виллибрордом Снеллиусом, умершим в 1626 г., не успев его опубликовать. После его смерти математик Гооль, с которым впоследствии Декарт поддерживал переписку, обнаружил среди его бумаг заметку о законе преломления. Точная дата открытия не известна; неизвестно также, кому Снеллиус сообщал о своем открытии, и сообщал ли кому-нибудь о нем.

Декарт владел этим законом приблизительно с 1627 г., насколько можно судить по письму его к Гоолю от 2 ноября 1632 г. в котором он указывает, что пять лет тому назад (т. е. в 1627 г.) он заказывал линзу с гиперболической поверхностью,—это свидетельствует о том, что точный закон преломления был ему известен.

В своем письме Гюйгенсу от 1 ноября 1632 г. Гооль сообщает, что оба — Снеллиус и Декарт — пришли к одному и тому же закону, „но различными путями: француз — через принципы и причины, голландец — через следствия и эксперименты“.

Гюйгенс, а после него Лейбниц, обвиняют Декарта в том, что во время одной из его поездок в Голландию (1619 и 1628) он получил от математика Гортензия сведения о труде Снеллиуса и использовал его, нигде не сославшись на него. На основании последних работ, посвященных этому вопросу, Декарт дошел до формулировки закона преломления самостоятельно.

Отмечая мимоходом несущественность вопроса о том, знал ли Декарт о работе Снеллиуса или нет, остановимся подробнее на развитии работ, связанных с преломлением. Вопрос о преломлении света при переходе его из одной среды в другую занимал внимание ученых с древнейших времен. Астроном и физик Птоломей (70—147), наблюдавший изменение видимого положения звезд вследствие атмосферной рефракции, желая определить количественную сторону явления, занялся изучением преломления на границе двух сред и построил ряд таблиц, приводящих соотношение между углом падения и углом преломления. Как видно из прилагаемой таблицы (см. статью С. И. Вавилова, упомянутую на стр. 561 этого издания), точность измерений очень высока для своего времени.

Угол падения (в градусах) . .	10	20	30	40	50	60	70	80
Истинный угол преломления	8	15.5	22.5	28	35	40.5	45	50
Угол преломления, по Птоломею	7.5	15	22	29	35	40.5	45	47.5

От Птоломея до Кеплера положение мало изменилось. Точные методы измерения углов еще не появились: все они опираются на применение оптических инструментов; но Кеплеру, автору первой в мире „Диоптрики“, содержащей описание зрительных труб, необходимо было знать точный закон преломления, и он много лет своей жизни трудился над этим вопросом, проделав большое число измерений и построив подробные таблицы углов преломления. Великий астроном и математик, открывший на основании неимоверно запутанных результатов наблюдений Тихо-Браге и других законы движения небесных светил, вращающихся около солнца, несмотря на продолжительные искания, не смог найти правильной формулировки закона преломления. В этом ему помешал неудачной выбор величин, а именно угла падения и угла отклонения луча (т. е. разность между углами преломления и падения). Между этими углами не существует простой зависимости. Кеплер должен был отказаться от точной формулировки и применять закон пропорцио-

нальности углов, неправильность которого для него не вызывала сомнений; впрочем, для первых шагов в теории оптических систем этого было вполне достаточно.

Большая заслуга Декарта заключается в том, что он понял необходимость точной формулировки закона преломления для выяснения вопроса о причине плохого качества изображения, даваемого оптическими инструментами его эпохи. В связи с этим необходимо остановиться подробнее на значении термина „точная формулировка" и объяснить, почему, опираясь на неверную формулировку закона, Кеплер получил ряд правильных формул и результатов. Напишем точный закон преломления в виде

$$n' \sin i' = n \sin i.$$

Разлагая $\sin i$ и $\sin i'$ в ряд по степеням i и i', получаем

$$n'\left(i' - \frac{i'^3}{6} \ldots\right) = n\left(i - \frac{i^3}{6} \ldots\right).$$

Из этой формулы мы видим, что при бесконечно малых i и i' отношение синусов превращается в отношение углов. А вся так называемая параксиальная оптика, т. е. та элементарная оптика кардинальных точек, из которой вытекают формулы, связывающие положение предмета с положением изображения, выводится в предположении бесконечно-малых углов. Отступления от точной пропорциональности углов падения и преломления сказываются только при вычислении аберраций оптических систем. Этим объясняется, почему теория аберраций могла возникнуть только после того, как стал известен закон преломления в своей точной формулировке, т. е. после Декарта. Сам Декарт, зная об аберрациях, в частности сферической, исправил ее, придавая преломляющим поверхностям специально подобранную форму.

[10] (к стр. 87). Такой способ определения показателей преломления по многим довольно очевидным причинам точностью не отличается, хотя в принципе правилен. Любопытно, что Декарт нигде не говорит о полном внутреннем отражении, непосредственно вытекающем из его закона преломления и позволяющем с гораздо большей точностью решить поставленную им задачу. Явление полного внутреннего отражения было известно еще до него: Кеплер глухо упоминает о нем в своей „Диоптрике" (стр. 10),[1] отмечая, что максимальная рефракция в горном кристалле равна приблизительно 48° (точный расчет дает 48° 10′). Странно, что Декарт умалчивает о явлении столь важного

[1] Страница указана по переводу на немецкий язык Плена (Лейпциг, 1904).

прикладного значения и с такой простотой вытекающем из его закона преломления.

[11] (к стр. 88). Такие рассуждения и доказательства, основанные на аналогиях, постепенно вышли из употребления: они мало убедительны, ибо, согласно старинной французской пословице, — comparaison n'est pas raison (сравнение — не объяснение).

[12] (к стр. 89). В настоящее время это называется „принципом обратного хода света“. Этот принцип не имеет исключений; следующие строки, в которых Декарт допускает наличие таких тел, которые не подчиняются этому принципу, основаны на недоразумении. Действительно, существуют среды, проходя через которые лучи искривляются: это неоднородные среды, т. е. среды, внутри которых показатель преломления меняет свое значение, например окружающая нас атмосфера. Однако и в этих средах принцип обратного хода света удовлетворяется с полной строгостью. То же самое, конечно, происходит и во всех других случаях.

[13] (к стр. 91). Стеклообразная структура хрусталика ввела Декарта в обман: на самом деле показатель преломления хрусталика мало отличается от показателя воды и равен 1.39.

[14] (к стр. 91). Это явление хорошо исследовано в настоящее время под названием „адаптации“. Известно также, что изменение диаметра зрачка вызывается рядом сильных ощущений (страх, ужас, боль), что правильно отмечено Декартом; впрочем, эти явления уже описаны в древнейших литературных произведениях. Но особый интерес представляют наблюдения, выполненные Декартом над зрительными ощущениями детей.

Прежде всего обращает внимание объективное явление сужения зрачка при приближении рассматриваемого объекта; Декарт, естественно, не мог понимать значения различных привходящих обстоятельств, сопровождающих опыт. В настоящее время работами Н. И. Пинегина установлено, что увеличение площади раздражителя (светящегося тела) вызывает сужение зрачка; очевидно, такое же действие оказывает приближение этого раздражителя. Вероятно, Декарт применял в качестве объекта факел или подобное яркое тело.

Но еще более интересны замечания Декарта относительно влияния на величину зрачка мысли о ярком свете или темноте. Этот факт проверен; как указывает Кравков, „у лиц с живым воображением уже при одной мысли о ярком свете или темноте путем условного рефлекса вызывается соответствующее сужение или расширение зрачков“ (Кравков. Глаз и его работа. 1950, стр. 88).

Ряд мест в этой главе „Диоптрики“, а также в других произведениях Декарта свидетельствует о том, что их автор, как правильно

отмечает большинство комментаторов Декарта, предвосхитил учение об условных рефлексах, что для XVII столетия следует считать крупным достижением, так как это учение принадлежит к самым тонким и сложным. Лишь в XIX столетии Сеченов и в особенности гениальный физиолог Павлов выяснили природу условных рефлексов и показали их громадное значение в физиологии человека. Павлов высоко ценил Декарта, о чем свидетельствует бюст последнего, стоявший на его рабочем столе в Колтушах.

[15] (к стр. 91). Эффект сужения зрачка при внимательном рассматривании предмета в современной литературе по физиологии зрения не описан, и, вероятно, не подвергался исследованию. Тем не менее можно его считать вполне возможным, по крайней мере когда наблюдатель присматривается в плохих условиях освещения, например в сумерках, в темной комнате. Опытами доказано, что наилучшая острота зрения получается при диаметре зрачка 2.5—3 мм. Не представляется невероятным, чтобы в результате условного рефлекса желание внимательно присматриваться к предмету приводило к тому, что зрачок сужается до указанной величины; однако это явление усложняется адаптацией, которая может вызывать обратный результат. Несомненно, что рассматриваемый вопрос может представить интерес для современных физиологов.

[16] (к стр. 92). Трудно себе представить, что это описание основных свойств глаза, под которым мог бы подписаться современный оптик после добавления нескольких несущественных поправок, выполнено более 300 лет назад, когда наука об анатомии только рождалась и такие гениальные мыслители, как Галилей, плохо разбирались в роли и работе глаза.

[17] (к стр. 93). В XVII в. слова „sens commun“ имели иной смысл, чем в настоящее время, когда их нельзя перевести иначе, как с помощью слов: здравый смысл. Декарт этими словами выражает понятие, объединяющее в себе все разновидности чувства (зрение, осязание и т. д.); можно перевести их словами: „вместилище чувств“.

[18] (к стр. 93). Душа, по Декарту, в противоположность телу — понятие, лишенное протяженности и материи, представляет собой приемник ощущений и впечатлений и связана с телом через посредство нервов.

Более подробно о душе см. гл. VI.

[19] (к стр. 95). Намек на „познавательные образы“; см. примеч. 6.

[20] (к стр. 96). Декарт принадлежал к той школе философов, для которых сами по себе ощущения не позволяют правильно воспринимать внешний мир. Такого же направления были древнегреческие элейские философы, к которым принадлежали Ксенофан и Парменид. Послед-

ние учили, что лишь разум на основании ощущений позволяет познать подлинное бытие. Эти воззрения противопоставлялись взглядам софистов, например Протагора, считавшего, что человек есть мера всех вещей, и отрицавшего объективное существование внешних объектов.

К последователям элейской школы принадлежал и Демокрит, создавший наивную теорию познавательных образов — частиц, воспроизводящих в микроскопических масштабах предметы, из которых они выбрасывались, чтобы попасть в глаз и создавать в мозгу отпечатки предмета.

Декарт, высмеивая „познавательные образы“, заменяет их гораздо более совершенной, основанной на первых успехах анатомии и физиологии, теорией. Обычно считают, что Декарт преувеличивает роль разума и принижает влияние чувств, — эта ошибка была позже исправлена французскими энциклопедистами. Для Декарта такое преувеличение роли разума в познании окружающих предметов естественно: разум — основа его философской системы.

Согласно диалектическому материализму, отражение в сознании человека материальных объектов представляет собой сложный процесс, совершающийся в диалектическом развитии. Этот процесс проходит „от живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике*...“ (В. И. Ленин. Философские тетради. 1947, стр. 146).

Декарт заканчивает главу изложением идеи, глубина которой станет понятной лишь позже: душа может ощущать столько же качеств в каком-нибудь осязаемом теле, сколько имеется разновидностей в движениях, вызываемых этим телом в мозгу. Короче — каждой разновидности движения соответствует ощущение качества. Примером, иллюстрирующим эту идею, может служить теория цветов Декарта (гл. I), согласно которой каждый цвет вызывается определенной комбинацией вращательного и поступательного движения частиц эфира, передающих ощущения цвета от предмета к мозгу человека.

[21] (к стр. 97). Первые опыты с „камерой обскурой“ были произведены Леонардо да Винчи и делла Порта; но никто до Декарта не давал такого правильного и близкого к современным воззрениям объяснения; естественно, слабым местом является вопрос о цветах.

[22] (к стр. 100). Эта теория цветов является передовой по сравнению с тем, что предлагали предшественники Декарта, для которых цвет представляет собой результат смешения черного с белым. Однако автор проявляет любопытную непоследовательность, оставляя в стороне роль приемника световой энергии — сетчатки.

Ощущение цвета является субъективным и обусловливается строением светочувствительного слоя сетчатки. Объективным является, как правильно указывает Декарт, движение частиц, называемых им атомами, передающих энергию от предмета к мозгу (см. примеч. 21).

[23] (к стр. 103). При первом чтении нельзя понять причину нерезкости изображения на краях сетчатки. Декарт ее объясняет лишь много позже, в VIII главе. Речь идет, согласно автору, о сферической аберрации (по современной терминологии). Здесь Декарт делает ту ошибку, какую совершает позже при изучении линз и зрительной трубы, а именно: он значительно переоценивает значение сферической аберрации по сравнению с другими аберрациями, которых, впрочем, он знает очень мало. На самом деле сферическая аберрация глаза, которая, кстати, только в последнее время была подробно исследована, в обычных условиях нами не ощущается, так как мы приспособились к ней. Причина правильно отмеченного Декартом падения резкости по мере того как изображение предмета уходит от оси глаза (точнее, от центра желтого пятна) заключается в том, что структура сетчатки, на которую принимается изображение, быстро изменяется и делается все грубее и грубее по мере удаления от желтого пятна.

В рассуждении Декарта есть еще одна ошибка. Сферическая аберрация остается постоянной при изменении положения изображения. Поэтому то ухудшение, о котором пишет Декарт, не может быть объяснено указанной аберрацией даже при отсутствии влияния структуры. Обвинять Декарта в указанных ошибках было бы по меньшей мере несправедливо, принимая во внимание, во-первых, что исследованием структуры сетчатки начали заниматься лишь в XIX в.; во-вторых, теория аберраций в достаточно полном объеме была разработана только во второй половине того же XIX в.

Любопытно отметить, что еще и в настоящее время встречается такая переоценка роли аберраций. Итальянский оптик Арджентиери обратил внимание на то, что кривизна поверхности сетчатки как раз соответствует кривизне поверхности изображения, даваемого оптической системой глаза, откуда напрашивается вывод, что форма и даже отчасти размеры глазного яблока приспособились к условию устранения аберрации. Такое постепенное приспособление действительно совершается, когда к этому имеются серьезные побудительные причины. Но в данном случае, откуда могут появиться достаточно сильные стимулы к исправлению аберрации, которая даже не ощущается нами и к тому же тонет в нерезкости, вызываемой огрублением структуры сетчатки на ее периферии?

[24] (к стр. 108). В этих рассуждениях, которые несколько отступают от основной темы главы, Декарт высказывает несколько положений

геометрической оптики, правда в очень общих чертах, касаясь лишь качественной стороны законов оптики.

Любопытно отметить, что Декарт, обладавший точной формулировкой закона преломления, не попытался построить более совершенную теорию оптических систем, чем это сделал Кеплер. Это было тем более необходимо, что теория Кеплера, изложенная в его „Диоптрике“, очень несовершенна, даже с точки зрения его упрощенного закона преломления. Несомненно, что решение этой задачи было вполне по силам Декарту, но, повидимому, он не оценил значения ее. К тому же в те времена еще не установилось то стремление к точным математическим формулировкам, которое начало развиваться несколько позже и по отношению к физике, например в работах Ньютона.

[25] (к стр. 109). Как свидетельствует переписка Декарта, последний начал интересоваться вопросами анатомии и происхождения животных и людей очень рано. Уже в 1629 г. в его письмах к своим корреспондентам, в частности к Мерсенну, встречаются указания на его занятия по медицине и смежным наукам.

[26] (к стр. 112). Мы встречаем здесь впервые после Мавролика, высказавшего в середине XVI в. ряд фотометрических положений, и Галилея, у которого встречаются некоторые соображения о рассеянии лучей в связи с отраженным от Луны светом, о которых Декарт, вероятно, не знал, — совершенно правильные, но не доведенные до конца рассуждения о фотометрии. Еще один, сам собой напрашивающийся шаг — и Декарт пришел бы к известному положению о том, что кажущаяся яркость протяженных предметов не изменяется, когда меняется расстояние до предметов (конечно при постоянной величине зрачка). В дальнейших рассуждениях, связанных с цветом, обнаруживается любопытная смесь верных и неверных высказываний, причем достаточно ввести незначительные поправки, чтобы получить правильные и для того времени оригинальные результаты.

[27] (к стр. 114). Этим безукоризненным даже с современной точки зрения рассуждением Декарт кладет конец очень распространенному в те времена и встречающемуся еще и в настоящее время мнению, согласно которому мы на самом деле видим предметы перевернутыми, и лишь особым усилием нашей воли заставляем себя воображать правильно расположенными. Такую же точку зрения излагал до него Кеплер.

[28] (к стр. 118). Все перечисленные Декартом признаки, по которым мы оцениваем расстояние до предметов, и в настоящее время не устарели и указываются в специальных руководствах. Есть различие только в терминологии, которая в „Диоптрике“, естественно, отличается от современной. Например, не ясно, что следует понимать под словами „свет сильнее“? В настоящее время для определения различных фото-

метрических понятий мы располагаем рядом таких терминов, как яркость, освещенность, поток, сила света, и т. д.; естественно, в эпоху Декарта четкой дифференциации между этими понятиями не было. В рассматриваемом месте следует понимать эти слова так: „световой поток больше". Действительно, приближаясь к глазу, предмет посылает на зрачок более сильный поток. Но сетчатка в случае протяженных предметов реагирует не на поток, а на яркость предмета, а последняя не зависит от положения предмета относительно глаза; этот фотометрический признак едва ли полезен для определения расстояния.

[29] (к стр. 121). Здесь в рассуждениях Декарта имеется неясность. Очевидно, что световые лучи, встречая на своем пути зеркало, меняют свое направление; но осталось без объяснения замечание автора „Диоптрики" о том, что это явление вводило в обман древних физиков, искавших изображения в этих зеркалах. Изображения выглядят точно так же, как и предметы: как последние, они излучают световые лучи, если не непосредственно, то по таким же законам, как и предметы, освещенные источником, роль которого в случае изображений играет так называемый „выходной" зрачок оптической системы. Единственное, что действительно отличает изображения от создающих их предметов, это их полная прозрачность, отсутствие материальности, столь непривычной для наших зрительных восприятий и сильно затрудняющей определение их положения, тем более, что такой лишенный материи предмет невольно проектируется на ближайший за ним, реально ощущаемый объект, чаще всего — само зеркало.

[30] (к стр. 121). Остроумное рассуждение, но мало убедительное: большинство лиц, опрашиваемых относительно кажущихся размеров луны и солнца, указывают гораздо меньшие величины: с тарелку, с блюдечко, с яблоко, даже с гривенник. В этих оценках произвол настолько велик, что положить их в основу для определения границы ощущения глубины рискованно. Так называемый порог глубины, или пороговый бинокулярный параллакс, т. е. наименьший угол, под которым видно расстояние между глазами из наиболее удаленной точки, еще отличимой от бесконечности, зависит от многих причин, но в среднем, как это определено в опытах Гассовского и Никольской, равно 10—12″, что соответствует расстоянию в 2—2.5 км, т. е. в пятьдесят раз больше, чем предполагал Декарт! Однако приведенные здесь числа являются результатом весьма тонких опытов; в обычных условиях рассматривания окружающих нас предметов этот порог кажется нам намного меньше, и представления Декарта являются довольно правдоподобными.

[31] (к стр. 122). Очень характерное для Декарта предположение. См. примеч. 14.

[32] (к стр. 123). Рассуждение о причине, почему яркие тела кажутся больше других при одинаковых угловых размерах, принято и сейчас.

Явление, описанное Декартом, называется иррадиацией; оно было уже описано Кеплером.

33 (к стр. 125). Четыре условия, поставленные Декартом, могут быть коротко изложены следующим образом:

1) изображения должны быть безаберрационными;

2) увеличение должно быть значительным;

3) яркость не должна быть ни слишком мала, ни слишком велика;

4) поле зрения должно быть наибольшим.

34 (к стр. 126). Остроумное, но неправильное объяснение так называемой „старческой“ дальнозоркости (пресбиопия). На самом деле описанное Декартом явление вызывается склерозом мускулов, управляющих аккомодацией.

35 (к стр. 129). Декарт пришел к описанию микроскопа (или лупы) довольно оригинальным путем, исходя от очковой линзы. По существу все его рассуждения правильны, так же как и его исходное положение о том, что увеличение, или, точнее, величина изображения на сетчатке, зависит от трех величин, перечисленных в тексте. Но выбор этих величин оказался неудачным. К этому вопросу мы вернемся в следующем примечании.

36 (к стр. 134). Изложение действия зрительных труб и сложных микроскопов свидетельствует о богатом воображении и замечательных способностях автора „Диоптрики“, но одновременно с тем о полном отсутствии общей теории оптических систем даже в самом элементарном виде. Декарт не владел или не знал, или, как иногда у него бывало, нарочно игнорировал „Диоптрику“ Кеплера. С помощью общих положений, изложенных в этой книге, с небольшим числом дополнений, которые позволяют ввести те новые сведения о показателях и о законе преломления, полученные им, Декарт мог изложить более кратко и просто, и при этом гораздо более общо, теорию микроскопов и зрительных труб. В этой части своей книги ее автор отступил от правил, преподанных им в первой основной программной части „Рассуждения о методе“.

37 (к стр. 135). Способ для ослабления яркости, предлагаемый Декартом, не может быть рекомендован, и наоборот, отвергаемый им — применение темных или цветных фильтров — предпочтительнее (при условии, что поверхность этих фильтров достаточно хороша). Уменьшение диаметра зрачка приводит к уменьшению сферической аберрации, и этот факт для Декарта имеет решающее значение, поскольку он знает о его существовании, но в действительности гораздо большее значение имеет диффракция, вызывающая в изображении нерезкость тем большую, чем меньше диаметр зрачка. О диффракции, однако, Декарт не знал: она была открыта позже (1665) Гримальди.

[38] (к стр. 135). Давая правильное освещение значения вопроса о поле зрения, Декарт приходит все же к неверному выводу о невозможности увеличивать его техническими средствами.

В эпоху, когда писал Декарт, были известны две категории зрительных труб: трубы Кеплера и трубы Галилея, отличающиеся друг от друга тем, что в первой из них окуляр представлял собой простую положительную линзу, во второй — простую отрицательную линзу. В первом случае поле зрения может быть увеличено заменой простой линзы системой положительных линз большого диаметра, так как, грубо говоря, при прочих равных условиях величина поля зрения пропорциональна диаметру окуляра; следуя этому принципу, идя на значительное усложнение конструкции окуляров, современные оптики увеличили поле зрения более, чем вдвое. Но и в трубе Галилея увеличение поля зрения также возможно, но другим приемом, а именно увеличением диаметра объектива. Так как по этому направлению нельзя итти далеко, при равных увеличениях поле зрения труб Кеплера всегда больше. Этим объясняется с первого взгляда непонятная фраза Декарта: „путем его оборачивания". Действительно, труба Галилея дает прямое изображение, в то время как труба Кеплера дает обратное, но при большем поле.

[39] (к стр. 136). Исправление дефектов глаза тренировкой или усиленной работой последнего, или даже специальной гимнастикой глаза относится к самым сложным вопросам глазной медицины, еще не получившим окончательного разрешения.

Поверье об индейцах, пристально рассматривающих солнце, не лишено основания: путем тренировки можно усиливать сопротивляемость ослепляющему действию солнца.

[40] (к стр. 138). Буквально: горящие точки. Почти на всех языках аналогичные по смыслу термины обозначают фокусы оптических систем. Происхождение этих слов легко понять: если направить оптическую систему на солнце, то в этой точке происходит концентрация световой энергии, и легко воспламеняющиеся предметы, помещаемые в этой точке, загораются. Латинское слово focus (фокус) имеет приблизительно тот же смысл, а именно: очаг. Оно было введено Кеплером.

В издании Мэра на рис. 37, 38 и 40 изображены два отрезка ab, в тексте не упомянутые. В настоящем издании они выпущены.

[41] (к стр. 140). Это доказательство может быть получено проще на основании принципа Ферма, современника и соотечественника Декарта. Из этого принципа вытекает, что в идеальной оптической системе оптический путь, отделяющий точку-объект от точки-изображения, одинаков для всех лучей.

Приводим доказательство. Предположим, что точка A лежит на директрисе эллипса, тогда $HB = eAB$, где e — эксцентриситет эллипса.

Согласно основному свойству эллипса, $HB + BI = 2a$, где a — длина полуоси эллипса. Из принципа Ферма имеем

$$n\overline{AB} + n'\overline{BI} = C \quad \text{или} \quad n\overline{AB} + n'(2a - \overline{HB}) = C$$

$$n\overline{AB} + n'(2a - e\overline{AB}) = \overline{AB}(n - n'e) = C - 2an'$$

Итак, если брать $e = \frac{n}{n'}$, оптический путь ABH от директрисы до фокуса одинаков для всех лучей. Вместо директрисы, очевидно, можно рассматривать любую другую прямую, параллельную ей, прибавляется лишь некоторая постоянная добавочная оптическая длина.

Это же доказательство приложимо для гиперболы, но там фокус оказывается мнимым.

В „Диоптрике“ Декарт рассматривает только случай, когда на преломляющую поверхность падает параллельный пучок. Правда, он остроумно обходит это ограничение тем, что в случае сходящихся или расходящихся пучков он применяет системы двух линз, эллиптических или гиперболических, между которыми проходит пучок параллельных лучей. Но несколько позже, в „Геометрии“, он решает общий вопрос о преломляющих поверхностях, отражающих безаберрационно любую точку в любую другую. Эти поверхности получили название „декартовых овалов“. Впрочем, следует отметить, что они не получили практического применения. Причина заключается прежде всего в том, что изготовление таких поверхностей представляет большие трудности, и, кроме того, необходимость в них отпадает в силу того, что исправление сферической аберрации, а вместе с ней и хроматической, о существовании которой Декарту было неизвестно, может быть выполнено с помощью одних сферических поверхностей, хотя и не так совершенно, как с помощью овала Декарта, впрочем, вполне достаточно для практики.

Уже Кеплер в своей „Диоптрике“ отметил, что форма преломляющей поверхности, при которой параллельный пучок сводится строго в точку, „приблизительно гиперболична“ (стр. 27).[1] Кеплеру было известно, что при больших углах падения рефракция (т. е. угол между преломленным и падающими лучами) оказывается больше, чем следует согласно закону пропорциональности углов. Его чутье подсказало ему правильное решение.

Любопытно, что при рассуждениях о форме преломляющей поверхности он использует известное ему свойство полного внутреннего отражения и численное значение этого угла для случая горного хрусталя (см. примеч. 10). Он полагал, очевидно из соображений исправления

[1] См. примечание на стр. 566.

аберрации глаза, что сечение поверхности хрусталика имеет вид гиперболы.

[42] (к стр. 151). Системы, обладающие тем свойством, что параллельные пучки, падающие на систему, выходят из нее параллельными же пучками, но другого сечения (в общем случае), заслуживают того, чтобы на них остановиться подробнее.

К этим системам, известным в настоящее время под названием телескопических, относятся все зрительные трубы как земные, так и астрономические, и поэтому они имеют большое значение, особенно для оптиков XVII в. Эти системы обладают свойствами, совершенно отличными от свойств других оптических систем: например, угловое линейное и продольное увеличение этих систем не зависит от положения предмета. Сам Декарт не исследовал свойств телескопических систем, как, впрочем, и других; даже вопрос увеличения этих систем, важность которого очевидна, не был затронут Декартом, несмотря на то, что он посвятил им целую главу.

[43] (к стр. 156). На этих страницах Декарт рассматривает очень важный вопрос об аберрациях пучков, исходящих из точек, отличных от осевых. Однако его рассуждения имеют общий, качественный характер, мало убедительны, а иногда и неверны. Не всегда меньшие кривизны поверхностей вызывают меньшие аберрации наклонных пучков. Явление аберраций гораздо сложнее, чем представлял себе Декарт. Эта сложность может быть охарактеризована тем, что вопрос об аберрациях полностью был решен только в конце XIX ст., хотя за это решение брались такие математики, как Ньютон, изучивший сферическую аберрацию, хроматическую, определивший фокусы астигматических пучков, как Леонард Эйлер в Петербурге, Клеро в Париже и многие другие.

Тем не менее чутье и здравый смысл и на этот раз не обманули Декарта: и посейчас конструктора-оптики при выборе оптических схем руководятся аналогичными соображениями.

[44] (к стр. 158). Эффект, о котором пишет здесь Декарт, имеет второстепенное значение; он зависит преимущественно от толщины линзы. Гораздо большее значение имеет для вопроса об увеличении оптической системы (хотя он об этом умалчивает) фокусное расстояние окуляра. К сожалению, это понятие, до которого почти дошел Кеплер в своей „Диоптрике“, осталось совсем чуждым Декарту, так как последний не позаботился построить общей, хотя бы упрощенной, теории изображений в оптических системах.

[45] (к стр. 159). Несомненно, мы видим здесь первую попытку ввести совершенно новое понятие входного зрачка и вообще зрачка. Автор вполне отдает себе отчет в абстрактности этого понятия и в возможных недоразумениях, которые это понятие может вызвать у читателя. Понятие зрачка

оптической системы после Декарта было забыто, и появилось снова не ранее XIX в. (Аббе, Шлейермахер).

46 (к стр. 159). Текст не отличается ясностью, причина все одна и та же — отсутствие общей теории оптических систем. Рассуждение Декарта о связи между расстоянием ML и расстоянием от линзы до изображения лишь приблизительно верно, потому что автор оперирует с плохо определяемыми понятиями. Если он ввел бы понятие фокусного расстояния, то он смог бы формулировать положение о строгой пропорциональности между величиной изображения и фокусным расстоянием, а из этой пропорциональности вытекает отчасти невозможность луча, „сжигающего на бесконечности“, так как с ней связан закон рассеяния света.

Фантастический вымысел о луче, „сжигающем на бесконечности“, который некоторые современные изобретатели повторяют под разными названиями и в различных вариантах, употребляя в качестве источников энергии „светящиеся точки“ в комбинации с „идеальными“ оптическими системами, был придуман Жан-Баттистой делла Порта. Кеплер в своей „Диоптрике“ уже доказывал, может быть не очень убедительно, опираясь больше на здравый смысл, чем на прочные физические основы, нелепость этого вымысла.

Следующее положение о двух подобных линзах или зеркалах тоже в общем верно, хотя на практике может не оправдаться: несомненно, что большое зеркало быстрее воспламенит освещаемый предмет, чем подобное ему малое, так как освещаемая большим зеркалом площадь больше, чем площадь, освещаемая малым, а это создает более благоприятные условия для разгорания, как легко проверить на простом опыте. Эти высказывания Декарта, а также и следующие, будучи математически сформулированными, приводят к ряду важнейших энергетических и фотометрических соотношений, в частности к формуле Чиколева — Манжена, опубликованной двести лет спустя. Из этих соотношений вытекает невозможность сжигания на расстоянии, как справедливо замечает Декарт. Впрочем, необходимо добавить, что все известные оптики того времени, даже предшественники Декарта, как Кеплер, держались такого же мнения, хотя едва ли были в состоянии это мнение научно обосновать.

47 (к стр. 161). После блестящих страниц, посвященных энергетике, последние абзацы восьмой главы производят впечатление формальных и навеянных соображениями чисто геометрического характера. Такие места редко встречаются в „Диоптрике“, где в основном преобладает прикладной, можно было бы сказать даже, пользуясь современным термином, технический характер. Излишне подробные соображения о преимуществах гиперболических поверхностей над эллиптическими, даже

в такое время, когда сводящая на нет результаты этих рассуждений дисперсия еще не была известна, не могли представлять серьезного интереса, тем более, что они носят слишком общий, далекий от практики характер.

Декарт справедливо отмечает большое значение угла, внутри которого лучи излучаются предметом и попадают на оптическую систему (по современной терминологии — апертурного угла). Этот угол при прочих равных условиях определяет световой поток, падающий на оптическую систему. Замечания Декарта, относящиеся к энергетическим понятиям, разбросаны по всему произведению и лишены общей связи; если их собрать воедино, можно было бы получить довольно полный трактат по фотометрии.

Замечание Декарта о преимуществе оптических систем, в которых происходит только „одно перекрещивание лучей", по сравнению с теми, где их происходит два, вызывает удивление: опасение, которое вызывает у Декарта перекрещивание лучей, хотя оно почему-то высказывается иногда и по сие время, непонятно. Единственное соображение, которое могло бы оправдать это опасение, заключается в том, что при пересечении лучи могут взаимно ослабить друг друга, но в „Трактате о свете", как было указано в статье настоящего издания „Декарт и оптика XVII века", автор в списке основных положений о распространении лучей отметил, что лучи, проходящие через одну общую точку, друг другу не мешают.

Таким образом, вывод Декарта о преимуществе труб, в которых лучи не пересекаются и которые мы теперь называем трубами Галилея, над трубами, где это пересечение происходит и которые мы называем трубами Кеплера, противоречит правильно высказанному им самим в другом месте положению.

В действительности, при равных условиях, т. е. при одинаковом числе линз и одной и той же величине выходного зрачка, обе системы с точки зрения яркости изображений равноценны.

48 (к стр. 162). Декарт придавал большое значение отражательной способности выбираемого материала. Отраженного света он избегал, очевидно, только из тех соображений, чтобы количество проходящего света не уменьшалось; из этого можно заключить, что он сильно переоценивал величину отраженного света. Измерить ее было очень трудно из-за полного отсутствия фотометрической аппаратуры, навыков и даже соответствующих понятий, появившихся сто лет спустя (Бугер).

Впрочем, необходимо отметить, что опасения Декарта были сильно преувеличены: в желтых лучах показатель преломления кварца (горного хрусталя) равен 1.544, а показатель преломления обыкновенного стекла хорошего сорта, например зеркального, колеблется в пределах 1.52—1.53, так что коэффициенты отражения кварца и стекла равны соответственно

4.3 и 4.6%. Разница в 0.3% совершенно неощутима. Очевидно Декарт был введен в заблуждение какими-то другими, оставшимися неизвестными обстоятельствами, например плохой полировкой стекла.

[49] (к стр. 164). Нельзя не отметить одной непоследовательности Декарта в последних рассуждениях, вызванной, повидимому, тем, что на численную сторону описываемых им явлений он не обращал достаточно внимания. Применение эллиптических или гиперболических поверхностей, настоятельно рекомендованных Декартом, вследствие очень незначительного относительного отверстия очковых линз, а следовательно, ничтожно-малого значения сферической аберрации, совершенно не обнаруживаемой глазом, не дает никаких преимуществ по сравнению с простыми сферическими поверхностями. Более того, форма очковых линз должна определяться не на основании условия уничтожения сферической аберрации, с которой можно не считаться ввиду ее малости, а из условия улучшения качества изображения на краю поля, для чего необходимо исправить астигматизм. Этого, конечно, Декарт не мог знать, но вычисление сферической аберрации было вполне в его силах, так как он знал закон преломления. Кроме того, Декарт вполне ясно представлял себе возможность отступлений от точных величин, полученных либо путем расчета, либо другими путями, пример чему он дает здесь же, допуская применения одной пары очковых линз для различных положений предмета.

[50] (к стр. 166). В этом описании лупы, или простого микроскопа, мы встречаем все ту же, характерную для Декарта, ошибку, а именно переоценку роли сферической аберрации. Впрочем, в случае сильных луп сферической аберрацией пренебречь нельзя, но еще большее значение имеет хроматическая аберрация, о которой Декарт, конечно, не знал. Зато все остальные примечания его указывают на тот большой опыт, которым владел уже в те времена Декарт в отношении работы микроскопа: принимаются меры для устранения рассеянного света, используется передняя часть оправы лупы для освещения наблюдаемого объекта, и т. д. Однако следует отметить, что при наблюдении прозрачных предметов описанная Декартом конструкция лупы обладает тем недостатком, что глаз будет ослеплен; впрочем, этот недостаток легко исправим.

[51] (к стр. 167). И здесь Декарт допускает возможность отступить от строгого выполнения условия устранения сферической аберрации. Очевидно, на такое допущение натолкнула его широко распространенная практика фокусировки с помощью раздвижения окуляра. Это совершенно справедливое допущение должно было ему подсказать возможность замены гиперболических поверхностей более простыми для изготовления сферических, но авторское самолюбие не позволяет ему

ступить на этот путь. В его переписке можно найти не одно возражение против гиперболических поверхностей: например, голландский математик Гортензий (письмо Гюйгенса Декарту от 28 X 1635) брался изготовить трубу из линз, с преломляющими поверхностями сферической формы, позволяющей читать книгу на расстоянии в четыре километра; на все нападки такого рода Декарт реагировал весьма болезненно. До конца своей жизни он остался верен гиперболическим поверхностям, к которым он впоследствии добавил овальные поверхности четвертого порядка, названные его именем.

52 (к стр. 167). Не ясно. Если поверхность строго гиперболическая и линзы изготовлены точно по рецепту автора, наклон лучей не имеет значения. Мы знаем теперь, после Френеля, что при больших наклонах лучей бóльшая часть падающего пучка отражается, отчего возникают значительные потери, но этого не мог знать Декарт.

Хотя он придавал большое значение потерям световой энергии вследствие отражения (см. его замечание на стр. 162 о непригодности горного хрусталя из-за больших потерь, какие он якобы вызывает), но он неправильно оценивал величину этих потерь. В связи с этим возникает еще раз вопрос о том, было ли ему известно явление полного внутреннего отражения; наиболее вероятный ответ, повидимому, должен быть отрицательным, так как он нигде об этом не пишет. Напомним, что Кеплеру это явление было известно из эксперимента.

53 (к стр. 168). Влияние толщины линз истолковано своеобразно: на самом деле в обоих приведенных здесь отношениях роль толщины незначительна.

54 (к стр. 168). Из этого места вытекает, что совершенство зрительной трубы определяется у Декарта ее увеличением; это и следовало ожидать, так как Декарт рассуждает с точки зрения чисто геометрической оптики.

Этот вывод является единственно возможным из тех, к которым мог притти Декарт, так так он исходил из положений геометрической оптики и, разумеется, не мог учесть значения диффракции: те диффракционные явления, которые он знал (см. статью в настоящем издании: „Декарт и оптика XVI века"), не могли подсказать ему правильного решения. Наш автор вполне правильно определяет размеры зрачков (по современной терминологии), исходя из соображений яркости изображения; законы геометрической оптики, которым он вполне доверяет, приводят его к заключению о необходимости значительно уменьшить размеры этих зрачков при рассматривании ярких объектов (солнце), и с точки зрения геометрической оптики такое уменьшение площади зрачков выгодно, так как оно уменьшает аберрации системы.

В связи с этим еще раз возникает вопрос: производил ли когда-нибудь Декарт наблюдение солнца с помощью рекомендуемого им приема? — для чего достаточно после окуляра ставить непрозрачную пластинку с малым отверстием, порядка сотых миллиметра. Если он его производил, он должен был заметить значительную расплывчатость изображения, которую, впрочем, можно было объяснить многими причинами, помимо диффракции; Декарт правильно поступил, умалчивая об этом.

55 (к стр. 168). Декарт определяет величину диаметра объектива совершенно правильно с точки зрения соображений яркости: при его способе расчета обеспечивается заполнение глазного зрачка светом.

Следующие за этим соображения о возможности уменьшения размера объектива, что должно вызвать, по его мнению, увеличение резкости изображения, верны с точки зрения геометрической оптики; но волновая природа света приводит не к улучшению, а к ухудшению качества изображения вследствие увеличения размеров диффракционного кружка.

56 (к стр. 169). Такие вспомогательные зрительные трубы, закрепленные на главной трубе, и сейчас применяются, хотя в обиход начинает входить способ наводки по делительным кругам. При отсутствии кругов приходится пользоваться „искателем“ — вспомогательной трубой малого увеличения, обладающей вследствие этого большим полем зрения.

57 (к стр. 170). Единственным препятствием к возможности получения любых увеличений, по Декарту, может оказаться несовершенное искусство мастеров. Это следует понимать так, что единственными границами для достижения бесконечно больших увеличений являются отступления формы поверхностей от идеальной и недостаточно хорошее качество стекла, из которого изготовляются линзы. Для эпохи Декарта этот взгляд был единственно возможным.

В настоящее время к этому препятствию мы бы добавили следующие: 1) диффракционные явления, преодоление которых требует применения все бо́льших и бо́льших размеров линз и зеркал; 2) хроматические аберрации (отсутствующие в зеркальных системах); 3) движение воздуха в земной атмосфере, еще незамечаемое во времена Декарта из-за малых увеличений труб и плохого качества изображений; оно может быть преодолено единственно тем, что обсерватории строятся в специально подобранных, обычно горных, местностях.

58 (к стр. 171). В этом описании сложного микроскопа Декарт попрежнему обращает главное внимание на форму поверхностей преломления. Кроме того, он определяет параметр гиперболической поверхности таким образом, чтобы получить максимально возможную яркость изображения. Хотя в настоящее время повышение яркости достигается

другими способами, но нельзя не удивляться глубоким познаниям Декарта в совершенно новой и неизведанной области световой энергетики. Отметим также, что предложенное им для повышения освещенности наблюдаемого предмета средство и сейчас применяется в почти неизмененном виде под названием „зеркало Либеркюна". Декарт также додумался до конденсора, показанного на рисунке в виде плосковыпуклой линзы, и почти до ирисовой диафрагмы, которую он заменяет отверстиями в кусках черной материи. Конечно, в его глазах конденсор играет только роль осветителя. Лишь много позже будет показано влияние апертуры конденсора на качество изображения, но не подлежит сомнению, что для своего времени микроскоп, описанный Декартом, представляет собой достаточно усовершенствованный прибор.

Мы мало знаем о микроскопах, изготовляемых в начале XVII в.; известно только, что ими занимались Липпергей, Меций, братья Янсен в Голландии, Дребель в Англии, Галилей в Италии.

Последний немало усовершенствовал микроскоп, применяя сложные конструкции с подвижным столиком и тонкими движениями; но как решался вопрос об освещении наблюдаемых предметов — неизвестно.

Неизвестно также, пользовался ли Декарт описываемыми им микроскопами для своих работ по анатомии. Об этом в „Диоптрике" он не сообщает; а в дошедшей до нас переписке он обходит молчанием этот вопрос.

59 (к стр. 172). В общем рассуждения Декарта правильны, но отсутствие формул придает им неопределенный характер. Если пренебрегать потерями света при прохождении лучей через оптическую систему, яркость изображения равна яркости предмета, когда выходной зрачок микроскопа больше глазного зрачка. Если площадь первого меньше в k раз площади второго, то яркость падает в k раз. Обычно в результате больших увеличений площадь выходного зрачка в десятки раз меньше площади глазного зрачка, так что необходимо сильно освещать предмет. Солнце — чересчур яркий, опасный источник, притом неудобный и ненадежный. Яркости неба вполне достаточно для средних увеличений.

60 (к стр. 172). Опять излишнее опасение световых потерь вследствие отражений от поверхностей. В действительности потери вследствие отражения на поверхностях линзы не превышают 8—10%, а присутствие дополнительной линзы, позволяющей увеличить апертуру системы, может повысить световой поток на 40—50%.

61 (к стр. 173). Весьма любопытные замечания, подтверждающие тот факт, что у Декарта имелись неясные, часто неверные, но все же определенные представления об условных рефлексах.

Первый совет — завязывать один глаз, чтобы расширить зрачок второго, — не достигает своей цели: опыт показывает, что зрачки глаз,

поставленные в различных условиях освещаемости, имеют различные величины диаметров.

Связь между движениями мускулов обоих глаз, о которой упоминает Декарт, безусловно существует, но в более слабой степени; как известно, тренировка имеет большое значение в этом вопросе, и тренированный наблюдатель может добиться полной „независимости“ между движениями обоих глаз.

Особый интерес представляет безусловно правильное указание „attendrir la vue“ (обострить зрение или, точнее, усилить чувствительность зрительных восприятий), а также совет „предрасположить свое воображение“ на рассматривание далеких темных предметов, — прием, несомненно относящийся к области теории условных рефлексов, что подтверждается примечанием, заканчивающим абзац.

Замечание о больших размерах предмета непонятно: увеличение площади глазного зрачка не влияет на размеры изображения, а только на кажущуюся яркость его, о чем Декарт прекрасно знал.

62 (к стр. 173). В конце IX главы еще ярче, чем прежде, выступает убеждение Декарта в том, что единственной причиной плохого качества зрительных труб и микроскопов является сферическая аберрация, вызываемая сферической формой преломляющих поверхностей. Нет никаких оснований считать, что Декарт произвел численные вычисления, которые могли бы пролить свет на вопрос, насколько велика аберрация. Эти вычисления не представляли для него никакой трудности; они убедили бы его в том, что можно применять и сферические преломляющие поверхности. Трудно понять, что при большом числе зрительных труб и микроскопов, распространенных в кругу просвещеннейших лиц того времени, никто не обратил внимания на хроматическую аберрацию, которая так бросается в глаза при наблюдениях звезд и мелких частиц. Единственное, что можно предположить по этому поводу, заключается в том, что скверное качество изготовления и плохое стекло настолько смазывали картину изображений, что цветная радуга вокруг изображения становилась незаметной. По той же причине, очевидно, ни один наблюдатель не увидел диффракционных колец около изображений мельчайших частей в микроскопе, хотя в условиях малых апертур, применяемых в те времена, и такого яркого и концентрированного источника света, каким являлось солнце, эти кольца должны были выступать особенно интенсивно.

63 (к стр. 174). Во французском тексте „outre qu'il est moins aisé de rencontrer en beaucoup qu'en peu“ смысл слова „rencontrer“ не ясен.

Обратимся к латинскому переводу, хотя следует помнить, что автор этого перевода де Курсель позволял себе иногда довольно большие

отступления от оригинала, которые, впрочем, Декарт в большинстве случаев оставлял без изменения.

Латинский перевод этого места гласит: „Non modo difficilius est feliciter aberrare in poliendo magno vitro quam in parvo, sed praeterea major est differentia inter superficias... hyperbolicam & sphaericam...".

Буквальный перевод на русский язык выглядит следующим образом: „Не только оказывается труднее удачно ошибиться (т. е. так, чтобы вместо сферы получить гиперболу, — *Ред.*) при полировке большой линзы, чем при полировке малой, — но, кроме того, разница между поверхностями гиперболической и сферической больше...".

Латинский текст откровеннее, чем французский, свидетельствует о крайне низкой технике шлифовки линз времен Декарта, когда изготовление гиперболической линзы было результатом счастливой ошибки и гиперболическая поверхность получалась случайно, как неудавшаяся сферическая!

[64] (к стр. 174). Это рассуждение, которое с первого взгляда может казаться убедительным, на самом деле требует поправки. Если бы даже большие зрительные трубы делались по подобию малых, то угловые аберрации оставались бы те же во всех трубах. Но большие трубы изготовляются с меньшими относительными отверстиями объективов по многим причинам, одна из которых заключается в трудности обрабатывать большие линзы. Поэтому при переходе от малых труб к большим разность между гиперболической поверхностью и сферической не увеличивается, а, наоборот, уменьшается. Тем не менее и в настоящее время изготовление точных несферических поверхностей представляет большие затруднения, которые преодолеваются только с помощью весьма тонких приемов испытания и ретуши.

[65] (к стр. 176). Это подробное описание прибора для определения значения показателя преломления позволяет приблизительно оценить точность результатов измерения. Большие размеры углового источника света (солнца), грубость применяемых приспособлений (досок) и дисперсия призмы сильно ограничивают ее, и нельзя рассчитывать даже на третий знак после запятой. Любопытно, что Декарт ни слова не говорит о дисперсии, хотя именно в этих измерениях она не может не обращать на себя внимания.

Очертание гиперболической поверхности Декарт получает графическим путем. Если учесть, что при изготовлении линзы с гиперболической поверхностью получится еще меньшая точность, нельзя удивляться тому, что качество зрительной трубы могло оказаться только плохим.

[66] (к стр. 177). Для точек *4, 5, 6* Декарт повторяет буквально все рассуждение, относящиеся к точкам *1, 2, 3*. Оно в переводе опущено.

[67] (к стр. 186). Весьма правильное замечание, делающее честь ее автору, так как оно опирается на довольно тонкие соображения, связан-

ные с волновыми аберрациями, о которых, конечно, Декарт не мог знать; само же рассуждение, приводимое им, мало убедительно. Как уже происходило неоднократно, верное чутье подсказывало ему правильное решение.

68 (к стр. 187). Декарт верно предсказал тот громадный переворот в науке и технике, который был вызван появлением микроскопа. Здесь же он напоминает о своих взглядах на материю.

69 (к стр. 187). Повидимому, впервые в научной (или вообще во всей) литературе приводятся приемы центрировки линз, притом с гиперболическими поверхностями. Для эпохи, к которой относится декартова „Диоптрика“, указываемые Декартом приемы казались излишне строгими. В настоящее время точность изготовления увеличилась в сотни раз. Для точной центрировки применяется точнейшая аппаратура, и работа ее основывается на те самые законы преломления, которые открыл Декарт.

К „Метеорам“

1 (к стр. 191). Это столь категорическое утверждение неправильно, ибо, как известно, высота облаков перистых форм доходит до 11—13 км, а в отдельных случаях бывает и порядка 15—16 км. Но формы облаков во времена Декарта еще не изучались и наблюдались облака преимущественно слоистого и кучевого типа, о высоте которых судили по отношению к горам, холмам и высоким постройкам — башням и колокольням.

2 (к стр. 191). Здесь, как и во всех своих работах, Декарт преследует свою основную цель — объяснить естественными причинами то, что может казаться человеку сверхъестественным, особенно явления, наблюдаемые на небе, которые с древних времен поражали человеческое воображение. Удивление, преклонение перед явлениями природы тормозят развитие науки, заставляя человека думать, что перед ним нечто непостижимое, и останавливая поиски пытливого ума. Значение Декарта в этом отношении было оценено нашим великим Ломоносовым: „Славный и первый из новых философов Картезий осмелился Аристотелеву философию перевернуть и учить по своему мнению и вымыслу“ (М. В. Ломоносов, Полн. собр. соч., изд. АН СССР, т. I, 1950, стр. 423). Все же он во многих своих представлениях, как и другие ученые того времени, отчасти следует положениям, установленным Аристотелем. Это и не удивительно, поскольку все естествознание очень долгое время находилось под влиянием аристотелевой физики. Гельман в своих „Beiträge zur Geschichte der Meteorologie“ („Очерки по истории метеорологии“), т. II, указывает, что все учебники метеорологии

вплоть до XVII в. сводились к комментариям Аристотеля, причем некоторые авторы только объясняли его положения, другие же добавляли к этому и собственные мысли и рассуждения. С начала XVII в. уже намечается переход к не-аристотелевским учебникам. Гельман считает, что французский курс „Traité de Météorologie" („Трактат по метеорологии") Луи Котта, изданный в 1744 г., был „первым большим учебником метеорологии, который уже не излагает учения Аристотеля, а существенным образом основывается на результатах метеорологических наблюдений". Необходимо добавить, что систематических метеорологичесиих наблюдений во времена Декарта еще не было и не могло быть, так как и основные приборы — термометр и барометр — были тогда только что изобретены.

[3] (к стр. 191). Говоря о летучих телах и парах, Декарт отдает дань традиции, сохранившейся со времен Аристотеля до XVII и даже начала XVIII в. В одном из курсов философии 1637 г. дается специальное определение летучих тел и испарений: „Definitio exhalationis et vaporis. Exhalatio est spiritus calidus et siccus, qui e terra, vel terreo corpore edicitur. Vapor est spiritus calidus et humidus qui ex aqua, vel aquae corpore edicitur" („Определение летучих тел и паров. Летучее тело — это дух теплый и сухой, который исходит от земли или от земных тел. Пар — это дух теплый и влажный, который исходит от воды или водных тел"). При объяснении метеоров Декарт пользуется, в основном, лишь понятием паров.

[4] (к стр. 192). Это также представление, свойственное средним векам, например, де С. Поль в „Summa Philosophia" (1-е изд. 1609 г., 2-е — 1611 г.) говорит „О несовершенном смешении, или метеорах" („De mixtis imperfectis seu Meteoris"). Многие современники Декарта делили метеоры на четыре группы по четырем стихиям — огонь, вода, земля и воздух; но Декарт не следует этому делению.

[5] (к стр. 196). Разницу между тремя аггрегатными состояниями воды Декарт объясняет большей или меньшей гибкостью ее частиц. Он объясняет и свойство воды расширяться при замерзании тем, что частицы, перестав гнуться под действием разреженной материи и в то же время утратив прямолинейную форму, уже не могут уместиться в прежнем пространстве. О том, что и другие тела могут встречаться во всех трех состояниях, Декарт, конечно, еще не мог знать. Соли, по его мнению, имеют частицы очень больших размеров, вообще неспособные гнуться, и потому всегда тверды; а спирты, наоборот, состоят из частиц совсем мелких, которые всегда могут быть согнуты, а потому никогда не замерзают.

[6] (к стр. 198). Один из приемов, нередко применяемых Декартом в его рассуждениях, — объяснение путем сравнения с каким-нибудь

общеизвестным фактом обыденной жизни. Нельзя, однако, сказать, чтобы эти сравнения всегда были убедительны, например, объяснение, почему пары занимают больше места, чем вода, по аналогии с пращой (стр. 199 настоящего издания). Но необходимо помнить, что в то время не было еще никаких правильных представлений о законах газов, о парах и вообще о явлениях испарения.

7 (к стр. 199). Одна из существенных внешних особенностей „Météores“ Декарта — наличие чертежей, поясняющих описания текста. В метеорологических руководствах того времени помещались по большей части лишь графические изображения направлений ветра от различных стран горизонта, т. е. розы ветров.

8 (к стр. 202). Конечно, при прочих равных условиях сильный ветер, вследствие увеличения испарения, ощущается как более холодный, но удивительно, что Декарт, нередко стремящийся проверить все на опыте, так безоговорочно утверждает, что сильные ветры — всегда холодные. Сильные и теплые ветры, особенно во Франции, да и в Голландии, где Декарт провел большую часть жизни, в летнее время не так уж редки, чтобы их можно было совсем не заметить. Кроме того, Декарт смешивает здесь в одно влияние температуры и влажности воздуха.

9 (к стр. 203). Под паром Декарт разумеет как невидимый водяной пар, так и мельчайшие капельки воды, становящиеся видимыми. Этому не приходится удивляться, поскольку в общежитии и в настоящее время нередко говорят о паре, выходящем из чайника, из котла паровоза, изо рта человека при дыхании на морозе, и т. п. Объяснение невидимости (прозрачности) паров во всяком случае остроумно. Деление паров на влажные и сухие приводит Декарта далее к заключению, что сильные ветры всегда сухи, а влажные — всегда слабы, что, конечно, неверно.

10 (к стр. 204). Деление летучих тел („exhalaisons“) на земли, спирты, летучие соли и масла сообразно величине частиц — также представление, принятое в то время и позднее, вплоть до XVIII в., под влиянием учения Аристотеля.

11 (к стр. 205). Декарт совершенно категорически утверждает, что частицы соли никогда не могут подняться выше поверхности воды; ему, конечно, не могло быть известно, что частицы соли встречаются и в высоких слоях атмосферы, где служат ядрами конденсации.

12 (к стр. 205). Хотя соль никак не может быть отнесена к „метеорам“, однако Декарт посвящает ей здесь целое рассуждение: это также дань средневековой традиции, по которой в трактатах о метеорах полагалось говорить о соли. Декарт последовательно выводит все свойства соли, вплоть до ее вкуса и противогнилостного действия, из

формы ее частиц, по его представлению, острых и негнущихся. С этим связано и объяснение замерзания воды, окруженной смесью соли и снега или льда.

13 (к стр. 207). Правильное утверждение, что в данном количестве воды при определенной температуре может растаять лишь определенное количество соли (правда, влияния температуры Декарт не учитывает), объясняется совершенно фантастическим представлением о накручивании одних частиц на другие.

14 (к стр. 209) Интересно, что Декарт высказывает вполне отчетливо мысль о сопротивлении воздуха движущемуся телу и о зависимости величины этого сопротивления для длинного тела от направления движения.

15 (к стр. 210). Следует отметить, что здесь Декарт уже вполне отдает себе отчет о круговороте воды в природе.

16 (к стр. 210). Во времена Декарта не было ничего известно о микроорганизмах, вызывающих фосфоресценцию моря, но он логически выводит особенности этого явления из свойств соли.

17 (к стр. 212). Здесь имеется как бы намек на явления поверхностного натяжения, открытые значительно позднее; но весь процесс кристаллизации соли получает совершенно произвольное объяснение.

18 (к стр. 215). Кристаллики соли, как известно, содержат мелкие полости, наполненные маточным раствором, вследствие чего крупная соль в огне трещит и разбрасывается.

19 (к стр. 216). В этих описаниях сказывается влияние алхимиков, разумевших под „солями“ далеко не то, что разумеет под ними современная химия, а вообще различные вещества, сходные с поваренной солью по вкусу, цвету, растворимости в воде и другим свойствам.

20 (к стр. 219). В основе всего учения Декарта о ветрах лежит понятие о парах. Приводя в виде примера шарик, называемый им „эолипиль“, Декарт создает дальше довольно последовательную, но не имеющую ничего общего с действительностью теорию происхождения ветров. Нельзя, однако, забывать, что Декарт не мог иметь об этом правильных представлений, поскольку тогда не только не существовало понятия о градиенте давления, но и самое давление воздуха было вновь открытым явлением. Знаменитый „великий опыт“ Паскаля относится к 1648 г., на 13 лет позднее написания „Метеоров“. Интересно попутно отметить, что Декарт проявлял живой интерес к этому опыту и есть даже указания, что ему принадлежит первоначальная его идея. А. Хргиан в „Очерках истории метеорологии“ (Гидрометеоиздат, 1948) говорит: „Декарт в письме к Мерсенну 13 XII 1647 утверждал, что ему эта идея принадлежит и им подсказана Паскалю. Однако нам трудно обвинять Паскаля в плагиате“. Отсюда, казалось бы, следует, что Декарт, если только у А. Хргиана

нет ошибки в дате, дал Паскалю идею опыта задолго до его фактического выполнения. Адам в своей биографии Декарта ссылается на два письма последнего не к Мерсенну, а к Каркави от 1649 г., где Декарт жалуется, что Паскаль, опубликовав свое „Изложение великого опыта“ („Récit de la grande expérience“), ничего не сообщил об этом Декарту, хотя обязан ему идеей опыта. В дальнейшем Декарт вел барометрические наблюдения в Стокгольме, где провел последний год своей жизни; одной из целей этих наблюдений было сравнение, по просьбе Паскаля, высоты стояния барометра в Стокгольме и Клермон-Ферране.

[21] (к стр. 220). Уже здесь высказывается представление об облаках как о сплошных телах в воздухе, которые могут, например, оказывать препятствие движению паров. В дальнейшем это представление развивается еще подробнее.

[22] (к стр. 221). Возникновение ветров от солнечного нагревания и замещение поднимающегося теплого воздуха более холодным из соседних мест — теория, в первом приближении имеющая в себе зерно истины, но здесь надо было говорить о воздухе, а не о парах; объяснение якобы наблюдаемого факта, что утром дуют преимущественно восточные, а вечером западные ветры, не верно. Любопытна ссылка на „всю механику вселенной“. Это явный намек на вращение земли, которое действительно оказывает влияние на движение воздушных масс, согласно теореме Кориолиса. Декарт не мог подозревать об этом явлении, но, несомненно, понимал, что вращение земли должно как-то сказываться на циркуляции воздуха. Как всегда после осуждения Галилея, Декарт обходит молчанием вращение земли.

Представление о ветрах, дующих сверху вниз и снизу вверх, совершенно несостоятельно. Несколько позже и Мариотт, говоря о причине ветров и о годовой смене направления пассатов, указывает, что когда солнце находится в южном полушарии над тропиком Козерога, воздух там расширяется настолько, что создает движение с юга на север, т. е. пассат. Здесь, таким обрэзом, имеется в виду расширение воздуха в горизонтальном направлении. Лишь в 1686 г. Галлей опубликовал более правильную теорию пассатов, а затем Гедли дал уточненное их объяснение, хотя и ему была неизвестна причина отклонения ветра вправо (в северном полушарии) при движении воздушного потока по параллели.

[23] (к стр. 225). Декарт ясно подчеркивает, что неоднородность земной поверхности, неравномерное распределение воды и суши вносят значительные изменения в предложенную им схему „циркуляции“. Интересно его замечание, что в отсутствие солнца сообщенное им ранее тепло сильнее „запечатлевается“ на материках, чем на морях, тогда как если говорить о сохранении тепла, дело обстоит как раз наоборот. Еще категоричнее он высказывается на стр. 233: „...вода, кото-

рая скорее теряет тепло, чем суша". Но поскольку Декарт объясняет ветры движением паров, у него получается правильная картина бризов — ночью с суши, днем с моря. Сила ветра, по его представлению, тем больше, чем больше его влажность, а потому на море ветер должен быть сильнее, чем на суше, что и действительно имеет место, но не по этой причине. Роль трения воздуха о земную и водную поверхности в то время совершенно не была известна.

[24] (к стр. 226). Таким образом, Декарт практически отвергает влияние на погоду планет и звезд и не придает большого значения даже луне, в чем идет впереди не только ученых своего времени, но и „лунных пророков", появлявшихся еще и в XX в.

[25] (к стр. 227). Интересно отметить это указание: слова „чем свойственно данному времени года" являются как бы намеком на некоторую климатическую норму, в которую ветры вносят изменения в ту или другую сторону. Отчетливо осознанное представление о такой норме относится, конечно, к значительно более позднему времени.

[26] (к стр. 228). Вполне правильно указание Декарта на тождество облаков и туманов, а главное то, что он считает и те и другие состоящими из капелек воды. Как известно, позднее, вплоть до XIX в., многие ученые придерживались взгляда, что облака и туманы состоят из пузырьков, наполненных воздухом. Но само образование капель или ледяных кристаллов из частиц воды, хотя изложено Декартом вполне последовательно с точки зрения его общих теорий, но объяснено по существу неправильно. Интересны все же его попытки связать различные формы гидрометеоров с условиями их образования — различными моментами наступления мороза, и т. п.

[27] (к стр. 231). Роса „падает" — распространенное в то время неверное представление и до наших дней сохранившееся в поэтических описаниях; то же Декарт повторяет и на стр. 233.

[28] (к стр. 234). Во времена Декарта уже было известно, что температура воздуха понижается с высотой; в начале XVIII в. была примерно оценена величина этого падения. Что облака могут встречаться в различных ярусах, что они могут состоять одновременно из ледяных и водяных частиц — это правильно, но само строение облаков и их образование описывается Декартом достаточно наивно. Мы видели, что ветры он представляет себе в виде каких-то отдельных масс, которые могут течь рядом друг с другом, совершенно не смешиваясь и внезапно где-то „кончаясь". Подобно этому и облака он мыслит в виде ограниченных, как бы застывших в определенной форме тел, иногда еще и покрытых ледяной коркой.

[29] (к стр. 236). Утверждение и пояснеиие на примере с бусами вполне произвольно: почему шесть, а не другое число?

30 (к стр. 238). Это совершенно правильно, но все, что говорится далее, не имеет под собой никакого основания. Прежде всего, сила ветра, как правило, возрастает, а не убывает с высотой; вообще, все, что касается образования и строения гидрометеоров, отчасти вытекает из первоначальных основных положений Декарта, но с физической точки зрения не выдерживает критики. Между прочим (что вполне простительно) Декарт смешивает град с крупой и ледяным дождем, а также приписывает образование крупных градин не столько вертикальным, сколько горизонтальным перемещением воздуха, хотя, как мы видели выше, он вполне допускает существование даже особых вертикальных ветров.

31 (к стр. 242). Это совершенно произвольное утверждение, хотя и приходится иногда наблюдать ледяные частички в форме пирамидок.

32 (к стр. 243). Наблюдения Декарта над формой снежинок бесспорно представляют интерес, но в объяснении их он ограничивается формулой „согласно обычной закономерности природы“. Этому не приходится удивляться, ибо и до сих пор причина образования снежинок той или иной формы еще полностью не изучена, хотя во многих странах ведутся исследования над связью этих форм с условиями погоды. Формы, близкие к снежинкам, удалось получить проф. Леману для иодоформа, который кристаллизуется также в виде шестиугольников.

Вопросом о форме снежинок занимался, между прочим, и Кеплер в своем сочинении „De nive sexangula“, 1611 г., где, задавая себе вопрос: „почему снег шестиугольный?“, отвечал сам себе: „причина этого мне еще не открыта“. Проф. Б. П. Вейнберг замечает в свой книге „Снег, лед, град и ледники“, что мы недалеко ушли от этого ответа Кеплера, хотя нас отделяет от него более трех столетий. Снег, который имеет большое значение в народнохозяйственной жизни, нередко был в XVI и XVII вв. даже предметом церковных проповедей, которые в Германии так и назывались: „Schneepredigte“ („снежные проповеди“).

33 (к стр. 247). Довольно редкая форма снежинок, носящая название „запонок“.

34 (к стр. 251). Это и формы, описанные ниже, представляют собою, очевидно, не град, а ледяной дождь, временами крупу и снег.

35 (к стр. 252). Образование крупных капель дождя от слияния более мелких — бесспорный факт, представление же о ветре, давящем сверху на облако или уходящем снизу из-под облака, является одним из теоретических построений Декарта, не имеющих ничего общего с действительностью.

36 (к стр. 253). Правильно подмеченный факт, что изморозь (но не иней) образуется с наветренной стороны, получает неправильное объ-

яснение. Здесь Декарт вполне отчетливо высказывает мысль, что роса и иней, как и изморозь, образуются из опускающегося тумана.

37 (к стр. 253). Такого особого вида росы метеорология не различает. Есть указания, что во Франции под „serein" разумеется пар, разрежающийся в мелкий дождь после захода солнца, причем прозрачность воздуха заметным образом не нарушается. Повидимому, в некоторых местностях этому явлению приписывалось вредное действие, сходное с простудой.

38 (к стр. 253). О каких „соках" здесь говорится, трудно себе представить; возможно, что это явления, сходные с так называемыми „чудесными дождями", о которых будет речь ниже.

39 (к стр. 253). Обильная роса обычно сопутствует устойчивой антициклонической погоде; отсутствие росы, наоборот, наблюдается чаще всего при пасмурном небе и бывает связано с переменой погоды к худшему, так что это указание имеет свое основание.

40 (к стр. 254). Такой местный признак погоды связан со взглядом Декарта на облака как на своего рода твердые тела, которые могут „стоять" на западе или на востоке.

41 (к стр. 254). Описание бурь, даваемое Декартом, также вполне отвечает его представлениям об облаках как об ограниченных, более или менее компактных телах. Вся эта глава логически вытекает из общих построений Декарта, но в ней нет ничего приемлемого с точки зрения современной науки. Как уже было указано, истинные причины ветров не могли быть известны во времена Декарта, а атмосферное электричество было открыто более чем на 100 лет позднее. Заслуга Декарта в том, что наиболее „сверхъестественные" и поражавшие воображение человека явления он свел к естественным и объяснимым причинам. Какие взгляды на эти явления господствовали в то время, да еще и после Декарта, видно, например, из „Гидрографии" Фурнье (Fournier. Hydrographie, 1643), который, будучи поклонником Декарта, пишет, однако, в своей книге: „Так как все же причины такого пламени естественны и лишь в редких случаях демоны замешиваются среди этих огней, то является слабостью ума предполагать, что все появляющиеся огни, все происходящие бури и громы возбуждаются каким-либо врагом, который пользуется магией и использует силы демонов для удовлетворения своей страсти". Для объяснения молнии Декарту приходится уже прибегать к „летучим телам".

42 (к стр. 259). Грома без молнии не бывает; иногда среди дня молния может остаться не замеченной тем или иным наблюдателем. Молнии без грома (не говоря о зарницах) наблюдаются преимущественно в тропических странах; это по большей части так называемые тихие разряды в большом масштабе.

[43] (к стр. 261). Здесь, очевидно, имеется в виду шаровая молния.

[44] (к стр. 261). Своеобразное объяснение так называемых „чудесных дождей“, которые, как известно, происходят оттого, что при бурных вихревых движениях воздуха с земли захватываются различные предметы или даже мелкие животные, которые затем выпадают из облаков, иногда в больших расстояниях от того места, где были подняты. Любопытно объяснение, согласно которому эти мелкие животные, или насекомые, происходят от гниения различных веществ в воздухе. Такое воззрение на происхождение насекомых держалось до конца XIX ст.

[45] (к стр. 262). Призвав на помощь „летучие тела“, Декарт применяет их далее к объяснению совершенно разнородных явлений: метеоров в тесном смысле, или падающих звезд, блуждающих огней, свечения на концах острых предметов или по существу тех же огней Эльма, о которых была речь ранее, и даже воспламенения недосушенного сена.

[46] (к стр. 263). Чтобы не оставлять необъясненным ничего „сверхъестественного“, Декарт останавливается и на особых световых явлениях — „знамениях“ на небе, описания которых встречаются в различных древних записях, в частности, и в русских летописях; это могут быть и искажения светил у горизонта под влиянием рефракции, и галосы, и, может быть, полярные сияния, известные в Европе уже с XVI в., и различные оптические явления, как правильно указывает Декарт, „искаженные и преувеличенные невежеством и суеверием“.

[47] (к стр. 264). Декарт первый дал стройную теорию радуги, вошедшую затем как первое приближение во все учебники, вплоть до нашего времени. Объяснение радуги преломлением и отражением света было еще раньше намечено далматским ученым де-Доминисом (1566—1624), но оно не носило такого законченного характера, хотя Ньютон, может быть в силу своего враждебного отношения к Декарту, считал творцом теории радуги именно не его, а де-Доминиса. Теория Декарта основана на вполне точных геометрических построениях и расчетах, но она не могла объяснить ни цветов радуги (объяснение, которое дает здесь Декарт, совершенно несостоятельно), ни появления дополнительных радуг, ни многих других частностей этого явления. В отношении цветов теория радуги была дополнена Ньютоном, полная же теория радуги дана лишь в XIX в. Эри (1836) и далее Пернтером (1897), с учетом диффракции света.

[48] (к стр. 274). Остроумный метод расчета световой энергии, находящий применение и в настоящее время в тех случаях, когда нельзя пользоваться аналитическим способом.

[49] (к стр. 279). На самом деле показатели преломления льда меньше показателя воды: 1.31 вместо 1.333, так что объяснение Декарта оказывается несостоятельным.

50 (к стр. 281). Интересно отметить, что Декарт говорит об отражении световых лучей многочисленными поверхностями таких тел, как пена, толченое стекло, элементы облаков, подходя таким образом к представлению о рассеянии света мелкими частицами.

51 (к стр. 283). Декарт не проводит резкого различия между венцами и кругами (галосами, или гало) вокруг светил. Галосы действительно вызываются преломлением света в ледяных кристаллах; венцы же связаны с дифракцией в мелких каплях облаков или туманов, а иногда даже частичках пыли; но явление диффракции Декарту известно не было. Венцы вокруг искусственных источников света Декарт даже считает чем-то вроде обмана зрения, приписывая их особенностям глаза наблюдателя.

52 (к стр. 287). Наиболее вероятное объяснение явления, о котором говорит Декарт, заключается в том, что после длительного нажима рукой на правый глаз форма роговицы последнего временно изменилась (такой опыт каждому легко осуществить) и, очевидно, приняла неправильную, несимметричную форму, что вследствие большой хроматической аберрации глаза (которую мы не ощущаем при нормальной работе глаза) вызвало описанное Декартом явление. Особенно примечательно его замечание о влиянии на картину „маленькой морщинки в виде прямых линий.“ Оно свидетельствует о том, что Декарт превосходно разбирался в процессе зрения.

53 (к стр. 288). Круги и ложные солнца, о которых Декарт здесь говорит, представляют сложное явление галосов; сюда относится и часто наблюдаемый круг в 22 градуса и круг в 45 градусов (точнее 46), о которых Декарт упоминает[1] наряду с описанием венцов. Эти явления зависят от преломления лучей солнца (иногда и луны) в ледяных кристалликах, имеющих форму призм; от ориентировки этих призм зависит и самая форма явления, которая бывает весьма разнообразной. Удивительно, как Декарт, видевший разложение света в призме и наблюдавший выпадение призматических кристалликов из облаков, не пришел к мысли об истинной причине галосов и ложных солнц, а счел нужным прибегать для их объяснения к опять-таки последовательным и логичным, но совершенно неправильным построениям в виде ледяных поверхностей и колец вокруг облаков.

54 (к стр. 293). Речь идет о Шикарде (Schickardus), профессоре Тюбингенского университета.

К „Геометрии“

1 (к стр. 300). В 1649 г. Фр. ван Скаутен (1615—1660) выпустил в Лейдене у Я. Мэра первый латинский перевод „Геометрии“ (Geometria,

[1] См. стр. 283 настоящего издания.

à Renato Des Cartes) Для современников сочинение Декарта представляло значительные трудности. Поэтому Скаутен присоединил к работе Декарта „Краткие замечания“ Фл. Дебона (1601—1652), а также собственные примечания.

Второе латинское издание содержало значительно больший материал и состояло из двух томов, выпущенных в одном переплете в Амстердаме у Эльзевиров (1659—1661). Примечания Скаутена в этом издании подверглись значительной переработке и заняли весьма большое место. Включены были „Начала всеобщей математики“, составленные по указаниям Скаутена Эр. Бартолином (1625—1698) и вышедшие ранее отдельно в 1651 г., и ряд других сочинений.

Третье латинское издание выпущено было в 1683 г. Оно было дополнено принадлежащим Декарту „Кратким курсом музыки“. Четвертое, последнее, издание выпустил Як. Бернулли (1654—1705) во Франкфурте-на-Майне у книгопродавца Фр. Кнох (1695). В нем были помещены, кроме прежнего материала, „Беглые заметки“ Як. Бернулли, излагавшие некоторые собственные геометрические изыскания автора.

В итоге латинское издание „Геометрии“ состояло из следующих сочинений (страницы указаны по изданию 1695 г.):

Renati des Cartes Geometria (1—106) (Ренэ Декарт. Геометрия). Florimondi de Beaune in illam Notae breves (107—142). (Ф. Дебон. Краткие замечания). Francisci a Schooten in eam den Commentarii recogniti et aucti (143—344) (Ф. Скаутен. Проверенные и дополненные комментарии). Francisci a Schooten Appendix de Cubicarum Aequationum Resolutione (345—368) (Ф. Скаутен. Приложение о решении кубических уравнений). Francisci a Schooten Additamendum in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; et Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis (369—400) (Ф. Скаутен. Искуснейшее решение некоторой трудной задачи и общее правило извлечения любого корня из двучлена). Johannis Huddenii Epistolae duae, quarum altera de Aequationum Reductione, altera de Maximis et Minimis agit (401—516) (И. Гудде. Два письма, из которых в одном говорится о приведении уравнений, а в другом о максимумах и минимумах). Henrici van Heuraet Epistola de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione (517—520) (Г. ван Гейрет. Письмо о преобразовании кривых линий в прямые). Francisci a Schooten Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesianae Geometriae methodum Conscripta ab Erasmo Bartholino (1—48) (Ф. Скаутен. Начала всеобщей математики или введение в метод декартовой геометрии. Составил Э. Бартоли). Florimondi de Beaune duo Tractatus posthumi. Alter de Natura et Constitutione, alter de Limitibus Aequationum (49—116) (Ф. Дебон. Два посмертных трактата: первый о природе и образовании уравнений, второй — о пределах уравнений). Erasmi Bartholinis Ad Tractatum

de limitibus aequationum Epistola praeliminaris (117—152) (Э. Бартолин. Вводное письмо к трактату о пределах уравнений). Johannis de Witt. Elementa Curvarum linearum (153—340) (И. де Витт. Начала кривых линий). Francisci a Schooten Tractatus de concinnandis demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico (341—422) (Ф. Скаутен. Трактат о проведении геометрических доказательств с помощью алгебраического исчисления). Jacobi Bernoulli. Notae et Animadversiones tumultuariae in universum opus (423—468) (Як. Бернулли. Беглые заметки ко всему труду). Renati des Cartes Musica (1—48) Compendium. (Ренэ Декарт. Краткий курс музыки).

Французское издание „Геометрии" опубликовано было также в 11-томном собрании сочинений Декарта, выпущенном В. Кузеном в 1824—1826 гг. Отдельно „Геометрия" была издана по-французски в Париже в 1886 г; запись формул в этом издании современная. Последнее и лучшее французское издание — в полном 12-томном собрании сочинений Декарта под редакцией Ш. Адама и П. Таннери: Oeuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Paris, 1897—1910 (далее цитируется как Oeuvres, с указанием тома). „Геометрия" занимает там страницы 367—485 VI тома. XII том этого издания содержит весьма обстоятельную биографию Декарта, написанную Ш. Адамом.

Немецкий перевод „Геометрии" с небольшим числом примечаний выпустил Л. Шлезингер (1-е изд., Берлин, 1894; 2-е изд., Лейпциг, 1923).

Имеется английский перевод с факсимиле первого издания 1637 г. The Geometry of René Descartes. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. With a Fac simile of the First Edition 1637. Chicago, 1925.

[2] (к стр. 301). Разделение математических предложений на теоремы и задачи встречается еще в античной математике. Разные школы и лица вкладывали в эти термины различное содержание. Для Декарта и его последователей теорема представляла собой общее предложение, утверждающее свойство, присущее всем объектам рассматриваемой области. Задача отличается от теоремы тем, что условиям ее удовлетворяют не все объекты рассматриваемой области, но лишь некоторая — конечная или бесконечная — их часть. Если, например, требуется внутри равностороннего треугольника найти точку, для которой сумма расстояний от трех сторон треугольника равна его высоте, то налицо теорема, ибо всякая точка треугольника обладает этим свойством. Решая вопрос о местонахождении такой точки, Скаутен в комментариях к „Геометрии" после ряда выкладок приходит к тождеству и заключает: „Отсюда ясно, что если мы приходим к уравнению, на обеих сторонах которого стоит одна и та же величина, то предложенный вопрос является не задачей, но теоремой; или что условие, из которого было выведено это уравне-

ние, содержится в данном вопросе, и он не может существовать без этого условия... поэтому искомую точку E можно брать внутри треугольника ABC, где угодно“ (изд. 1695 г., стр. 229. Далее цитируется как Geometria).

Напротив, отыскание в плоскости точки, равноудаленной от двух данных точек A и B, является задачей: условию удовлетворяет совокупность точек плоскости, лежащих на прямой, перпендикулярной к отрезку AB в его середине. Впрочем, достаточно изменить область объектов предложения, чтобы оно из задачи превратилось в теорему: все точки прямой, перпендикулярной к отрезку в его середине, равно удалены от его концов. См. также: Г. Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века, пер. П. С. Юшкевича, М., 1938, стр. 68—69 (далее цитируется как Цейтен, ч. I).

„Построение задачи“ — геометрическое решение ее, включающее геометрическое доказательство истинности решения. Для древних „основное значение геометрического построения заключается в доказательстве реального существования того самого объекта, к нахождению которого приводит это построение“ (Цейтен, ч. I, стр. 70).

[3] (к стр. 301). Там, где мы бы сказали „отрезок“, Декарт почти всегда говорит: la ligne droite — „прямая линия“. „Отрезок линии“ встречается у Декарта редко („Le segment de la ligne“, Oeuvres, т. VI, стр. 383; ср. стр. 316 настоящего издания). Твердое терминологическое разграничение отрезка, луча и прямой — дело Я. Штейнера (1796—1863).

[4] (к стр. 301). Следуя древним, Декарт представляет квадратный корень с помощью пропорции: если $1 : x = x : a$, то $x = \sqrt{a}$. Аналогично $x_1 = \sqrt[n]{a}$ можно выразить с помощью $n-1$ средней пропорциональной $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$1 : x_1 = x_1 : x_2 = x_2 : x_3 = \ldots = x_{n-1} : a.$$

Декарт рассматривал извлечение корня как вид деления. „При делении, замечает Скаутен, делимое относится к делителю, как частное к единице. При извлечении же квадратного корня данное число, или делимое, относится к корню, или делителю, как корень, или частное к единице (Geometria, стр. 147). Эту связь обоих действий Декарт подчеркнул еще в „Правилах для руководства ума“, написанных около 1628 г.: „Что касается таких делений, в которых делитель не дан, а только обозначен некоторым отношением, как, например, когда говорят, что нужно извлечь квадратный или кубический и т. д. корень, то заметим, что в этих случаях делитель и все остальные члены нужно представлять

как линии, образующие ряд непрерывно-пропорциональных, из которых первой является единица и последней делимая величина" („Правила для руководства ума", М., 1936, стр. 171).

5 (к стр. 302). Слово le cercle, обозначающее у Декарта и круг и окружность, переводится везде, где речь идет о пересечении линий, словом окружность. В редких случаях Декарт говорит об „окружности круга".

6 (к стр. 303). Буквенное обозначение величин, предполагаемых данными, но численно не фиксированных, восходит к древним грекам. В „Началах" Эвклида (около 300 г. до н. э.) величины часто выражались отрезками прямых, которые назывались в тексте с помощью двух букв, отмечавших их концы; у Архимеда (287—212 гг. до н. э.) такую же роль играла одна буква (не две)

В средние века обозначение величин с помощью букв изредка встречалось у Леонардо Пизанского (около 1202), выделявшего их в тексте точками (например так: . *a*.) Буквы широко применял при решении задач Иордан Неморарий (около 1200 г.). Николай Оресм (1323—1382) снабжал буквы даже числовыми множителями, вроде 4. *a*. Однако при этом аппарат формул и правил преобразований, составляющий ядро современной алгебры, в это время еще совершенно отсутствовал.

Неморарий, например, изображал результаты действий над буквами каждый раз другими буквами и вместо стройной системы соподчиненных формул получал хаотическое нагромождение новых и новых буквенных знаков, лишенное силы операторного исчисления. Лишь значительно позднее слабые и разрозненные начатки удобного буквенного алгорифма попадаются у Христофора Рудольфа (около 1525 г.) и у Дж. Кардано (1501—1576).

Быстрее развивалась символика неизвестных, искомых величин. Буквенное обозначение одной неизвестной мы находим у александрийского математика Диофанта (вероятно, III в.); ее знак ς являлся, повидимому, сокращением какого-либо соответствующего слова. Для степеней неизвестной Диофант применял сокращения их названий и некоторые комбинации этих сокращений. Так, квадрат неизвестной обозначался δ^{υ} (от δυναμις — состояние, сила), куб κ^{υ} (κυβος — куб), четвертая степень $\delta^{\upsilon}\delta^{\upsilon}$, пятая $\delta^{\upsilon}\kappa^{\upsilon}$ и шестая $\kappa^{\upsilon}\kappa^{\upsilon}$. Несколько веков спустя индусы стали обозначать различные неизвестные, присваивая им сокращенные наименования различных цветов.

Вслед за алгебраистами народов Средней Азии, особенно хорезмийцем Мухамедом бен-Муса ал-Хорезми (около 830 г.), математики европейского средневековья долго называли неизвестную „вещью", по-латыни res, по-итальянски cosa, (откуда старонемецкое название алгебры coss, косс), квадрат ее — quadratus или census (состояние, сила), куб —

cubus. В XV—XVI вв. начали появляться и совершенствоваться знаки для степеней неизвестных величин. Так, Ник. Шюке (1484) писал $7^3\,\tilde{m}$, что соответствует нашему $7x^{-3}$. Если Кардано записал бы еще наше уравнение $x^3+5x=12$ в форме cubus $\tilde{p}5$ rebus aequantur 12, то у Рафаэля Бомбелли (1572) оно уже имело бы вид $1^3\ \tilde{p}\ 5^1$ aequ. 12, а у Виета 1 $C+5\ Q$ aequatur 12. Довольно сходные приемы можно встретить у Иоста Бюрги (1552—1632), Иоганна Кеплера (1571—1630) и др. Немецкие коссисты ввели ряд особых значков, соответствующих нашим x, x^2, x^3 и т. д. и получивших широкое распространение. Недостатком их являлось громоздкое обозначение высших степеней. Кроме того, все эти обозначения относились к целым положительным степеням одной неизвестной. Симон Стевин (1548—1620) предложил отмечать неизвестные по порядку, начиная со второй, сокращениями sec., ter., и т. п. Коссист Мих. Штифель (1487—1567) обозначал — отнюдь не систематически — степени различных неизвестных готическими буквами, выписывая нужное число раз основание степени: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}$, ... $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}$, ... Эта символика подходила только для небольших целых положительных степеней.

Все это существенно подготовило возникновение символической алгебры. Ее необходимость и возможность заключались и в том факте, что правила решения формулировались для уравнений общего вида, которые выражали, например, так: „кубы вместе с корнями равны числам“, причем число кубов и корней, так же как и свободный член, мыслилось любым (положительным). Принципиальный поворот был сделан Франсуа Виетом (1540—1603), который ввел важнейший элемент символической алгебры: общий буквенный коэффициент уравнений („Введение в искусство анализа“ — In artem analyticen Isagoge, 1591). Благодаря этому стало возможным изучение свойств общих алгебраических уравнений и употребление общих формул. Виет подчеркивал значение ясного и систематического обозначения. „Так как, — писал он, — для того чтобы можно было опираться на некое вспомогательное средство, необходим всегда одинаковый и наглядный символ, то данные величины должны отличаться от искомых неизвестных, например, тем, что неизвестные величины будут обозначены буквой A или другой гласной E, I, O, U, Y, а данные — буквами B, G, D или другими согласными“. В употреблении прописных букв Виет, как и во многих других случаях, примыкал к древним. Уравнения в записи Виета содержали еще довольно большое количество слов (равно, умноженный на, и т. д.).

Томас Герриот (1560—1621) записывал уравнения совсем без слов (опубл. в 1631 г.). Для выражения целой положительной степени неизвестной он выписывал все множители подряд: a^5 у него выглядело так: *aaaaa*. Прописные буквы он заменил строчными.

Материалы, сохранившиеся от раннего периода деятельности Декарта, не дают полной картины развития его символики. В 1619 г. Декарт в письмах к своему ученому другу Исааку Бекману (1570?—1637), пользовался коссическими знаками, следуя той книге, которая, вероятно, служила одним из главных источников его первого ознакомления с математикой, именно „Алгебре" Христофора Клавия (1537—1612; ср. Oeuvres de Descartes, т. X, стр. 154 и сл.). Эти обозначения встречаются у Декарта и значительно позднее (в 1628 г.), а если опереться на даты, установленные П. Таннери, — даже после выхода „Геометрии", именно в 1638 и 1640 гг. (Oeuvres, т. X, стр. 297, 298). В 1619—1620 гг. у Декарта можно найти и другое обозначение, взятое у Клавия и латинизировавшее коссические знаки: a^2 обозначалось aq, a^4 через aqq (Oeuvres, т. X, стр. 247, 248; также около 1629 г., там же, стр. 289, 294). Обозначение величин, представленных отрезками, буквами e и k, служившими для названия этих отрезков, применялось Декартом и Бекманом в 1618—1619 гг. (Oeuvres, т. X, стр. 55).

К 1619 г. относится также использование значка O для представления произвольного коэффициента уравнения. В письме 26 марта 1619 г. правая часть уравнения $x^2 = ax + b$ записывается в виде $Ox + ON$ (я ставлю x вместо коссического знака; N — от numerus, число). „Этот знак O, — писал в примечании Г. Энештрем, — есть, вероятно, нуль и имеет своим назначением то же, что и точки, которые Декарт позднее употребил в своей „Геометрии", т. е. отмечает место некоторой величины, зависящей от рассматриваемого вопроса" (Oeuvres, т. X, стр. 156; ср. прим. 96).

В „Правилах для руководства ума" 1628 г. Декарт сделал шаг вперед: „Для большего удобства мы воспользуемся строчными буквами a, b, c и т. д., чтобы выражать уже известные величины, и прописными A, B, C для выражения неизвестных величин. Часто мы будем ставить цифры 1, 2, 3, 4 и т. д. либо впереди этих знаков, для указания числа величин, либо позади, для того чтобы обозначать количество отношений, которые будут в них мыслиться. Так, например, если я записываю $2a^3$, то это одно и то же, как если бы я говорил: удвоенная величина, обозначаемая буквой a, содержащая 3 отношения". (Русск. пер., стр. 157—158).

Впервые знаки x и y, а также обозначения yy, y^3, y^4 мы находим в рукописи, относимой Таннери примерно к 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 310 и сл.). Впоследствии они полностью вытесняют другие символы. Вначале, следуя, быть может, обратному порядку алфавита, первую неизвестную Декарт обозначал z, следующую y, третью x, но уже в III книге „Геометрии" в качестве первой неизвестной всегда берется x, — возможно потому, что по начертанию своему x была сходной с привычным для Декарта коссическим знаком неизвестной. Запись aa или xx,

наряду с более последовательной, но не более экономной a^2 или x^2, сохранялась вплоть до К. Ф. Гаусса (1777—1855).

Современное общее обозначение любых степеней (дробных и отрицательных) по способу Декарта, который сам ввел его лишь для целых положительных показателей, есть в основном заслуга И. Ньютона (1642—1727), который применил его около 1667 г. У Декарта начальные буквы алфавита обозначали сами по себе положительные величины, и для выражения отрицательных величин он присоединял знак минуса. Применение букв с предстоящим знаком + для выражения как положительных, так и отрицательных данных величин — дело Гудде (1628—1704; см. прим. 96).

Влияние Виета на создание Декартом его алгебраической символики весьма мало вероятно для первого периода творчества Декарта, когда он находился под влиянием коссистов; в иезуитской школе, где получил образование Декарт, его также вряд ли могли ознакомить с сочинениями гугенота Виета. В переписке Декарта имя Виета впервые встречается в 1632 г. „Благодарю вас, — писал он Мерсенну в мае 1632 г., — за присланную книгу по анализу; но, между нами, я не вижу в ней большой пользы, не вижу также, чтобы кто-нибудь, прочтя ее, смог не только что решить любую проблему (nullum non problema solvere), но и решить какую бы то ни было проблему, как бы она ни была легка. Дело не в том, что я не желаю верить, что авторы весьма ученые люди, но моего разумения недостаточно, чтобы судить о том, что содержится в этой книге...“ (Oeuvres, т. I, стр. 245). Приведенными латинскими словами заканчивалось „Введение в искусство анализа“ Виета, которое вышло вторым изданием в 1624 г., так что весьма возможно, что с этим трудом Декарт познакомился именно весной 1632 г. Правда, слова Декарта об „авторах“ наводят на мысль, что Мерсенн послал Декарту Fr. Vietae ad Logisticen Speciosam Notae priores („Первые заметки о видовой логистике“), изданные и снабженные примечаниями Ж. Бограном (1631, ср.: Oeuvres, т. I, стр. 248). Быть может, Мерсенн переслал Декарту оба сочинения Виета? Или же, быть может, с „Введением“ Декарт познакомился ранее, а заявление Виета насчет nullum non problema solvere цитировал, рассчитывая на память своего корреспондента? (Ср. прим. 85).

Труд Герриота Декарт, по его словам, увидел лишь после выхода в свет „Геометрии“ (Oeuvres, т. II, стр. 455 и сл.; ср. прим. 81).

Подробнее об истории алгебраических обозначений см. J. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik, Berlin, 1921, t. II; F. Cajory, A. History of mathematical notations, Chicago—London, 1928, t. I.

[7] (к стр. 303). Знак корня $\sqrt{\ }$, довольно быстро вытеснивший полное или сокращенное словесное обозначение его R (от Radix), применявшееся итальянцами и французами в XV—XVI вв., возник у коссистов около 1480 г. Вначале квадратный корень представлялся точкой, ставившейся впереди подкоренного выражения, корень четвертой степени — двумя точками, и т. п. У Хр. Рудольфа к точке присоединяется штришок и в результате появляется знак $\surd$. Для обозначения корней высших степеней коссисты и следовавшие за ними авторы ставили после радикала знак степени. Так поступал и Декарт. Символ $\surd$ Декарт употреблял еще около 1619 г. Подкоренное выражение он, как и некоторые другие, выделял сперва точками (Oeuvres, т. X, стр. 247; также около 1629 г., там же, стр. 288—289). В 1629 г. у него встречается придуманная им объединительная черта над подкоренным выражением (Oeuvres, т. X, стр. 292). В „Геометрии" имеются лишь квадратные и кубические корни, высшие попадаются в переписке. Здесь Декарт обозначает $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ и т. д. через $\surd 3)$, $\surd 4)$, ставя после показателя корня скобку и употребляя выделительные точки. Например, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ он пишет в виде $\surd 3).\ 20+\surd 392$ (Oeuvres, т. III, стр. 190). Запись Герриота была сходной. Современная форма $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ введена была Альб. Жираром (1595?—1632), но окончательно утвердилась лишь в XVIII в.

[8] (к стр. 303). У Декарта стоит ordinairement — обыкновенно; в латинском переводе Скаутена: semper — всегда.

[9] (к стр. 303). Словом „измерение" переведен термин dimension, введенный в применении к членам алгебраического уравнения Декартом. (Ср. прим. 15).

[10] (к стр. 303). Слово quantité везде переведено через „величина". — Здесь, как видно, Декарт освобождается от неудобств, связанных с „принципом однородности" Виета.

[11] (к стр. 304). Почти все математики XVI в. выражали равенство полным или сокращенным словом „равно". Так поступал около 1619—1620 гг. и Декарт (Oeuvres, т. X, стр. 234). Придуманный им знак ∞ попадается среди рукописей, отнесенных Таннери примерно к 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 292 и сл.). Происхождение его не известно. Применялся этот знак в XVII в. довольно часто.

Современный нам знак равенства (=) ввел Роб. Рекорд (1510—1558), писавший, что не может быть двух более равных вещей, чем пара параллельных линий одинаковой длины; его символ был только значительно длиннее нашего. Знак Рекорда прежде всего получил широкое применение в Англии. Во Франции он привился не скоро, тем более, что Виет понимал под $a=b$ разность между большей и меньшей из

величин a, b. У Декарта символ $=$ обозначал иногда $\pm$; в таком смысле он употребляется перед радикалом в выражении для корня квадратного уравнения (письмо от 23 авг. 1638 г., Oeuvres, т. II, стр. 314 и сл.). В письме от 30 сент. 1640 г. Декарт применил знак $=$ в нашем смысле, в связи с аналогичным пользованием им адресатом (Oeuvres, т. III, стр. 190). В настоящем издании знак равенства Декарта заменен на современный.

12 (к стр. 305). Словом „приводя“ переведено декартовское en les demeslant. В латинском переводе это место гласит: „atque ita, reducenda illas, efficere oportet. . .“ (Geometria, стр. 4). Декарт охотно употреблял слово demesler (распутывать, выделять) в применении к неизвестным или уравнениям, но часто пользовался также терминами reduire, reduction.

13 (к стр. 305). Следуя традиции, восходящей к древним и к математикам среднего Востока, а в более близкое время к коссистам, Декарт называет последовательные целые степени геометрическими и затем квазигеометрическими терминами. Четвертая степень — это квадрат квадрата (quarré de quarré; лат. quadrato-quadratum; коссическое zensus de zensu), пятая — sursolide (sursolidum у Адама Ризе, 1489? — 1559, или surdesolidum у Штифеля; также и supersolidus), шестая — квадратокуб (quarré de cube, quadratocubus; коссическое zensicubus), седьмая — в письме от 30 сент. 1640 г. (Oeuvres, т. III, стр. 188) B-sursolide (от bissursolidum). Точное происхождение слова sursolidum не известно; по смыслу этот варваризм должен выражать в шкале квазигеометрических величин некое сверхтело.

14 (к стр. 305). В латинском издании „Геометрии“ последнее уравнение имеет вид

$$z^4 \infty + az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4.$$

15 (к стр. 305). Декарт говорит здесь degré. Далее этим термином он пользуется в конце первой книги, в „Ответе на вопрос Паппа“. Из текста этого ответа видно, что „степени“ кривых совпадают с их „родами“ (genres), на которые подразделил Декарт алгебраические кривые в классификации, излагаемой в начале второй книги.

16 (к стр. 306). Не ясно, что понимал Декарт под „всеми делениями, которые окажется возможным выполнить“. Скаутен говорит, что „сложение и вычитание не делает членов какого-либо вопроса более трудными (difficiliores). . . При умножении же члены запутываются (involvuntur) и усложняются (intricantur), а измерения увеличиваются; напротив, при делении члены распутываются, а измерения уменьшаются. То же следует иметь в виду относительно извлечения корня, которое, как было сказано выше, есть лишь род деления. Поэтому для нахождения про-

стейших членов, к которым может быть приведен вопрос, следует тщательнейшим образом следить за тем, чтобы при приведении уравнений были испробованы все деления и извлечения, какие возможно сделать" (Geometria, стр. 162). Таким образом, Скаутен добавляет, что нужно произвести всевозможные извлечения корней, под которыми следует понимать, в соответствии с словоупотреблением той эпохи, не только извлечение корней в нашем смысле слова, но и определение одного неизвестного через другие неизвестные уравнения. Это можно поставить в связь с тем описанием решения задач, которое содержится в так называемом „Исчислении господина Декарта" (ср.: Р. Декарт. Геометрия. М. — Л., 1938, стр. 130). Что касается понижения степени, упоминаемого Скаутеном, то, быть может, он имел в виду деление левой части уравнения на двучлен формы $x - a$, о котором много говорится в третьей части „Геометрии".

В одной рукописи от 1619—1621 гг. Декарт говорит о „приведении с помощью деления" (reductio per divisionem) при удалении второго члена из уравнения, в современной записи имеющего форму

$$z^3 = a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Декарт, вероятно, производил преобразование корня („деление") посредством подстановки $z = \frac{a_2}{3} x$, после чего уравнение приводилось к

$$x^3 = 3x^2 + \frac{9a_1}{a_2^2} x + \frac{27a_0}{a_2^3},$$

затем полагал $x = y + 1$ и получал уравнение вида

$$y^3 = b_1 y + bo$$

(Oeuvres, т. X, стр. 244—246).

[17] (к стр. 306). Плоскими называли задачи, которые можно построить посредством прямой и окружности. Термин этот, возникший у греков, связан, быть может, с тем, что такие задачи (приводящие к уравнениям 2-й степени) выражались древними в их так называемой геометрической алгебре с помощью отношений между прямоугольными площадями, лежащими в одной плоскости. Отсюда же и термин „плоское место". Но возможно, что плоскими эти задачи называли потому, что служащие для их построения прямая и окружность с самого начала рассматривались как планиметрические линии (см.: Цейтен, ч. I, стр. 142—143).

[18] (к стр. 306). Термины „гипотенуза" и „катет", появившиеся еще у греков, в XVII в. применялись широко. Декарт называет здесь катеты сторонами (les costés), а гипотенузу основанием (la baze). В позднегре-

ческой и последующей литературе гипотенуза иногда называлась основанием, ибо треугольник рисовали так, что гипотенуза была горизонтальной.

[19] (к стр. 306). Второй, отрицательный корень Декарт здесь во внимание не принимает, но в третьей книге такие корни употребляются и строятся (ср. прим. 82).

Скаутен приводит второй корень, „меньший, чем нуль, и называемый г. Декартом ложным“, и доказывает его существование проверкой — возведением в квадрат. Корень этот, согласно Скаутену, изображается отрезком *PM*, который на самом деле дает абсолютную величину второго корня. Аналогичные указания делает Скаутен по поводу следующих далее уравнений (Geometria, стр. 162, 163).

[20] (к стр. 308). В этом случае уравнение имеет мнимые корни. Об отношении Декарта к ним см. книгу III и прим. 93.

[21] (к стр. 308). Папп — александрийский математик конца III в. — эпохи эпигонства и нарастающего упадка античной культуры и науки. Автор ценного „Математического сборника“, большая часть которого сохранилась.

[22] (к стр. 308). Эвклид — александрийский ученый, живший около 300 г. до н. э., автор знаменитых „Начал“, в 13 книгах которых были изложены система геометрии, теоретическая арифметика и геометрическая алгебра древних, а также ряда других трудов. Четыре книги „Конических сечений“ Эвклида, о которых говорится далее в тексте Паппа, полностью утеряны.

[23] (к стр. 308). Аполлоний Пергский — греческий геометр (265?—170 до н. э.) автор основоположного труда „Конические сечения“, из восьми книг которого полностью сохранились первые семь (последние три в арабском переводе).

[24] (к стр. 309). Перевод Ф. Коммандино (1509—1575), которым пользовался Декарт (изд. 1588 г.), не вполне точен. Здесь должно быть не „в его III книге“, а „по поводу его III книги“. Вот собственные слова Аполлония из вступления к I книге „Конических сечений“: „III книга содержит ряд замечательных теорем, полезных для синтеза телесных мест и определения условий возможности задач. Большинство этих теорем и притом наилучшие — новы; после того как я нашел их, я увидел, что Эвклид не выполнил синтеза места к 3-й и 4-й линиям, но дал лишь часть его и даже с этим не вполне справился, ибо без наших открытий не было возможности выполнить полный синтез“.

[25] (к стр. 310). Телесными называли задачи, которые можно построить посредством конических сечений. Термин этот, возникший у греков, связан, быть может, с тем, что такие задачи, приводящиеся к уравнениям 3-й (или 4-й) степени, выражались отношениями между параллелепипедами.

Отсюда же термин „телесное место“ для обозначения конических сечений. Но возможно, что телесными эти задачи называли потому, что служащие для их построения конические сечения первоначально были определены именно как сечения тела-конуса, а не через свои планиметрические свойства. Остальные кривые греки называли линейными местами (Цейтен, ч. I, стр. 143).

[26] (к стр. 310). Пользуясь новым изданием Паппа, П. Таннери в примечании к „Геометрии“ (Oeuvres, т. VI, стр. 721—722) переводит это место совершенно иначе: „и не было дано синтеза ни для одной из этих линий, ни показано, что он пригодился бы для этих мест, даже для той линии, которая, казалось бы, является первой и наиболее естественно встречающейся“.

Смысл терминов „анализ“ и „синтез“ можно кратко передать следующим образом. Решая задачу с помощью анализа, представляют себе прежде всего, что задача решена. Исходя из этого, далее стараются вывести цепь умозаключений, приводящих, в конце концов, к какому-либо истинному положению. Анализ показывает, как может быть решена задача, если она разрешима. „Синтез заключается затем в том, чтобы, прежде всего, реально выполнить это решение, т. е. определить искомые величины и фигуры таким образом, чтобы удовлетворить получившимся в результате преобразования условиям; после этого остается еще доказать, что и первоначально заданные условия удовлетворены. При отсутствии более простого способа это доказательство совершается обыкновенно с помощью преобразования условий в обратном порядке по сравнению с тем, который имел место в анализе, и приводит к выводу, что если выполнены новые условия, которыми заменили первоначальные, то эти первоначальные условия тем самым тоже по необходимости удовлетворяются“ (Цейтен, ч. I, стр. 71—72).

[27] (к стр. 312). Во французском переводе Таннери здесь еще добавлено: „говоря о заключенном такими-то линиями по отношению к квадрату такой-то прямой или к заключенному такими-то другими“ (Oeuvres, т. VI, стр. 722).

[28] (к стр. 312). Сложное или составное отношение соответствовало у древних нашему произведению вещественных чисел. Так, составленное из двух отношений $a:b$ и $b:c$ сложное отношение представляло $a:c$. То, что теперь называют произведением двух или трех сомножителей греки выражали с помощью площадей прямоугольников или объемов параллелепипедов, либо же с помощью сложных отношений. Последний способ имел то преимущество, что был пригоден при любом числе сомножителей. Слово „прямоугольник“ в смысле произведения удержалось до XVII в., квадрат отношения греки назвали „двойным отношением“, куб — „тройным“ и т. д. (Цейтен, ч. I, стр. 101—102).

[29] (к стр. 313). Здесь Декарт говорит о „произведении“ сомножителей (ce qui se produist lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre). Латинские термины producere, productum часто встречаются уже с XIII в., слова multiplicare, multiplicatio — в I в. н. э.

[30] (к стр. 314). Об истории задачи Паппа, послужившей для Декарта пробным камнем силы изобретенного им математического метода, Таннери писал (Oeuvres, т. VI, стр. 722—724): „Способ, посредством которого древние изучали место к трем или четырем прямым, был мастерски разъяснен в замечательном сочинении г. Цейтена из Копенгагена, переведенном на немецкий язык г. Фишер-Бенцоном под заглавием «Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum»“ (1886). Поэтому мы отметим здесь лишь то, что в словах Аполлония и Паппа могло ввести в XVII в. в заблуждение относительно подлинной истории этой задачи.

Она, по всей вероятности, была поставлена и решена посредством геометрического анализа древних в одном сочинении, несколько предшествовавшем времени Эвклида, именно в пяти книгах „Телесных мест“ Аристея (которые, между прочим, наверное содержали элементы ряда теорий, недостающих в „Конических сечениях“ Аполлония, — теорий, которые поэтому считали неизвестными Аполлонию, вроде свойств фокуса параболы, директрис конических сечений и т. д.). Синтез, весь ход которого указывался анализом, был интересен лишь в качестве упражнения или приложения к отдельным данным; но было важно объединить и установить различные необходимые теоремы либо для облегчения синтеза, либо для придания ему полноты. Именно это (а не сам синтез) и было, повидимому, той целью, которую поставил себе Эвклид в части четырех книг его „Конических сечений“, — сочинении, уже более не изучавшемся во времена Паппа; Эвклид, повидимому, ограничился в них тем, что объединил синтетические труды более древних геометров, в частности для облегчения изучения „Телесных мест“ Аристея. Аполлоний в третьей книге „Конических сечений“ восполнил оставленную незавершенной теорию (одним из больших его достижений было, в частности, одновременное исследование двух противолежащих гипербол, или, как выражаемся мы, двух ветвей одной гиперболы); но эта книга могла быть использована в вопросе о месте к трем или четырем прямым лишь в том случае, если было уже известно решение с помощью анализа, которое одно лишь могло пролить свет на подлинное значение теорем Аполлония и на способ их применения.

В начале XVII в. математики, не располагавшие более ни сочинением Аристея, ни „Коническими сечениями“ Эвклида и имевшие на руках лишь четыре первые книги Аполлония да весьма недостаточные указания Паппа, должны были для решения вопроса о месте к трем или четырем прямым заново открыть древний анализ, приемы

которого им были неизвестны, или же дойти до поистине трудной догадки. Поэтому для иллюстрации употребления нового аналитического метода, задуманного Декартом с целью облегчить приложение алгебраического исчисления к геометрии, он не мог бы найти более разительного примера, чем это геометрическое место.

Задача была поставлена Гоолем перед Мидоржем по крайней мере уже в 1630 г. (Oeuvres, т. I, стр. 256, строка 18) и перед Декартом в 1631 г. (там же, т. I, стр. 232—235). Еще до выхода „Геометрии" Декарт указал на нее Мерсенну в 1634 г. как на задачу, которую следует предложить Робервалю (там же, т. I, стр. 288). Ферма решил ее ранее 1637 г. по образцу древних (Oeuvres de Fermat, т. II, стр. 105, строка 2); однако сохранилось только очень изящное его решение для места к трем прямым. Роберваль занялся ею, повидимому, позднее; но 4 авг. 1640 г. он писал Ферма: „После этого открытия (именно — его метода касательных [примеч. Поля Таннери]), я взялся за телесные места к трем и четырем линиям, которые я полностью восстановил, хотя, чтобы ничто не было опущено, требуется не менее рассуждений, чем в первых шести книгах «Начал» Таким образом, он должен был дать полный синтез". (Oeuvres de Fermat, т. II, стр. 201.)

Декарт решил задачу Паппа в конце 1631 г.; это видно из письма Гоолю от января 1632 г. (там же, т. I, стр. 233—234), в котором Декарт сжато формулирует основные результаты исследования.

Я. К. Гооль (Gool) — профессор математики и восточных языков в Лейдене (1596—1667). Кл. Мидорж (1585—1647) — французский геометр. Жиль Роберваль (1602—1675) — профессор математики в Коллеж де Франс, один из предшественников творцов исчисления бесконечно малых.

О задаче Паппа в древности см. также: Цейтен, ч. I, стр. 143—145. Замечательно изящное, чисто геометрическое решение задачи Паппа дал Ньютон. См. его „Математические начала натуральной философии" (1686) в „Собр. трудов акад. А. Н. Крылова" (т. VII, М.—Л., 1936, стр. 121—122).

31 (к стр. 315). У Декарта здесь стоит: mais toutes celles qui sont d'un degré plus composées y peuvent servir. Перевод Скаутена передает мысль Декарта яснее: quemadmodum etiam nulla earum imaginari licet, quae ibidem utilis esse non possit (Geometria, стр. 12).

32 (к стр. 315). В общем виде задача Паппа формулируется следующим образом. Дано $2n$ прямых с уравнениями (в произвольной косоугольной системе)

$$d_i = x + k_i y + l_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Длины отрезков, проведенных из точки $M(x, y)$ к этим прямым под данными углами отличаются от левых сторон di лишь постоянными мно-

жителями (такие выражения и получает далее Декарт). Уравнение геометрического места к $2n$ прямым имеет поэтому вид

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \pm \lambda\, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n},$$

а места к $(2n-1)$-ой прямой — вид

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \pm \lambda\, d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n-1}.$$

Между прочим, это общее определение для места к трем прямым дало бы

$$d_1 d_2 = \pm \lambda d_3,$$

а не

$$d_1 d_2 = \pm \lambda d_3^2,$$

как его определяли древние (ср. прим. 58).

Наш двойной знак $\pm$ у Декарта отсутствует; его заменяет в соответствующем пункте исследования замечание, что точки геометрического места следует представлять себе в различных углах (четвертях).

О классификации кривых Декарта см. прим. 42.

Утверждения относительно построения точек этих кривых Декарт доказывает далее. Если, например, рассматривается место к 3, 4 или 5 прямым, то, выбрав одну из них за ось абсцисс, так, чтобы один из множителей левой части уравнения оказался просто y, и придавая y какое-либо значение, мы для определения x получаем квадратное уравнение, и точки места, следовательно, строятся циркулем и линейкой. Но в случае пяти параллельных прямых уравнение места, не содержащее теперь x, оказывается относительно y кубическим

$$y(y+c_1)(y+c_2) = \pm \lambda (y+c_3)(y+c_4),$$

и для построения точек здесь необходимо, вообще говоря, прибегнуть к коническим сечениям.

Декарт не заметил, что построение точек места к шести прямым также представляет собой плоскую задачу. В самом деле, если одну из трех прямых первой группы взять за ось абсцисс, а одну из трех прямых другой группы за ось ординат, то уравнение места запишется в виде

$$y(x+k_1 y+l_1)(x+k_2 y+l_2) = \pm \lambda x (x+k_3 y+l_3)(x+k_4 y+l_4)$$

или

$$\frac{y}{x}\left[x\left(1+k_1\frac{y}{x}\right)+l_1\right]\left[x\left(1+k_2\frac{y}{x}\right)+l_2\right] =$$

$$= \pm \lambda \left[x\left(1+k_3\frac{y}{x}\right)+l_3\right]\left[x\left(1+k_4\frac{y}{x}\right)+l_4\right].$$

Для определения абсциссы точки пересечения кривой с прямыми, проходящими через начало, $\frac{y}{x} = \text{const}$, возникает квадратное уравнение.

Утверждая, что всякая кривая n-го рода, т. е. по-нашему $2n$-го порядка, представляет собой место к $4n$ прямым, Декарт ошибался. В общем случае это неверно, хотя и справедливо при $n=1$ и $n=2$. В самом деле, общее уравнение кривой $2n$-го порядка содержит $\frac{2n(2n+3)}{2}$ коэффициентов, а в уравнении геометрического места параметров, которыми можно распорядиться, $8n+1$. При $n>2$ система уравнений для определения коэффициентов становится, вообще говоря, несовместной.

При чтении дальнейших выкладок Декарта следует иметь в виду, что в его время не принято было выражать отношения сторон в данных треугольниках с помощью тригонометрии, символика которой была развита весьма недостаточно.

33 (к стр. 319). У Скаутена добавлено aut etiam unam, т. е. „или же одно" (Geometria, стр. 15).

34 (к стр. 321). Спираль Архимеда — трансцендентная линия, описываемая точкой, равномерно движущейся по прямой, равномерно вращающейся вокруг какой-либо своей неподвижной точки. Уравнение ее в полярных координатах имеет вид $\rho = a\varphi$.

35 (к стр. 321). Квадратриса Гиппия из Элиды (вторая половина V в. до н. э.) — трансцендентная кривая. В квадрат $ABCD$ вписывается четверть круга; радиус $AB=r$ равномерно вращается вокруг центра A, сторона BC равномерно перемещается параллельно самой себе вдоль AB; при этом AB и BC совпадают с AD одновременно. Квадратрисой является место точек пересечения этих движущихся прямых. Ее полярное уравнение $\rho = \frac{2r}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$; в прямоугольных декартовых координатах оно имеет вид $y = x \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2r}$. Квадратриса была сперва применена к трисекции угла и позднее к задаче о квадратуре круга.

36 (к стр. 321). Если из данной точки A проводить прямые AM, пересекающие данную прямую CD, и от точек их пересечения N откладывать на AM в обе стороны отрезки данной длины $NM=b$, то место точек M и будет конхоидой Никомеда (около 180 г. до н. э.). Пусть расстояние от A до CD есть a, тогда уравнение конхоиды будет $(x-a)^2(x^2+y^2)-b^2x^2=0$ и в полярных координатах $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Знаку плюс (+) в последнем уравнении соответствует так называемая „первая" конхоида, знаку минус (—) при $b<a$ — „вторая". (Ср. прим. 100).

[37] (к стр. 321). Даны круг с центром O, два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (горизонтальный) и касательная в точке D. Из точки C проводятся прямые, пересекающие касательную в E и окружность в F. Точки M циссоиды Диоклеса (около 180 г. до н. э.) получаются, если на отрезках CF откладывать отрезки $CM = EF$. Уравнение циссоиды

$$x^3 = y^2 (2a - x),$$

где a — радиус круга (ось абсцисс — вдоль CD, начало в C).

Все названные кривые были, повидимому, построены в связи с поисками решения классических задач древности: удвоения куба, трисекции угла и квадратуры круга. Об их истории см.: Цейтен, ч. I.

[38] (к стр. 322). Декарт, таким образом, включает в геометрию те линии, которые „описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими“, и исключает из нее линии, которые „представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить“. Несколько далее он утверждает, что первые, „геометрические“ линии „обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии“, т. е. что уравнения „геометрических“ линий в прямолинейной системе координат — обязательно алгебраические. Тем самым Декарт ограничил геометрию изучением алгебраических кривых. Связано это было с тем, что общим методом математического исследования для Декарта являлась исключительно алгебра. Хотя Декарт с успехом изучал отдельные трансцендентные линии (ср. прим. 65, 67), но он был убежден, что общих приемов их исследования быть не может. Лейбниц и Ньютон подвергли впоследствии глубокой и действенной критике эту концепцию Декарта. Вместе с тем установленное Декартом ограничение предмета геометрии отразилось в том, что аналитическая геометрия в собственном смысле слова изучает лишь алгебраические кривые, обладающие рядом специфических свойств, выделяющих их среди всех линий.

Как видно из приведенного текста, Декарт, рассматривая кинематические свойства геометрических и механических кривых, различает два соответствующих им способа их описания. Геометрические линии описываются непрерывным движением механизма, в котором движение одних элементов полностью определяется движениями некоторых других; при описании механических кривых отдельные движения между собой независимы, как в случае спирали Архимеда (об образовании линии с помощью „двойного“ движения писали и древние, например Симпли-

кий в начале VI в. н. э.). Непосредственно затем Декарт приводит пример механизма, точки которого могут описывать некоторые алгебраические линии любого порядка и который позволяет строить любое число средних пропорциональных. В этих не вполне отчетливо формулированных положениях Декарта содержится одна из важнейших теорем кинематики механизмов, согласно которой с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движения начальных звеньев полностью определяют движения всех остальных, можно описывать дуги любых плоских алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Теорема эта была доказана в 1876 г. А. Б. Кемпе. Следует заметить, что интерес к теории шарнирных механизмов особенно возрос лишь в середине XIX в. в связи с важной в машиностроении проблемой перевода системы круговых движений в движение строго прямолинейное. С этой проблемой был связан ряд замечательных теоретических и практических исследований П. Л. Чебышева (1821—1894), его ученика Липкина, одесского профессора В. Н. Лигина (1846—1900), А. Поселье и других.

Идея классификации кривых по типу порождающих их движений возникла у Декарта еще в 1619 г. (см. письмо к Бекману от 16 марта 1619 г., Oeuvres, т. X, стр. 155—156).

Терминология Декарта была вытеснена современной после того как Лейбниц ввел вместо слов „геометрические кривые" — „алгебраические кривые", а вместо „механические" — „трансцендентные" (1684 г.; см.: Лейбниц, Избранные отрывки из математических сочинений. Успехи матем. наук, III [I], 1948, стр. 173—174). Термин „геометрические" для Лейбница был неприемлем, ибо он возражал против исключения из геометрии, т. е. математики, „механических" кривых.

[39] (к стр. 322). В латинском издании стоит XYZ.

[40] (к стр. 322). В латинском издании добавлена буква E.

[41] (к стр. 323). Этот инструмент был изобретен Декартом между 1619 и 1621 гг. Декарт описал его в личных заметках (Cogitationes privatae) и применил к построению корней уравнения $x^3 = x + 2$ (Oeuvres, т. X, стр. 234—240). В начале третьей книги „Геометрии" Декарт употребил его для построения любого числа средних пропорциональных. Механизм Декарта напоминает иной, но по идее родственный, механизм александрийского ученого Эратосфена (276—195? гг. до н. э.) для построения двух средних пропорциональных. Описание мезолабия Эратосфена дал Эвтокий Аскалонский в сохранившемся комментарии к сочинению Архимеда „О шаре и цилиндре". О мезолабии Эратосфена см. статью В. В. Бобынина в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона, т. 16, 1896.

Уравнения линий, описываемых инструментом Декарта, суть

$$r^2 (x^2 + y^2)^{2k-1} = x^{4k} \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots).$$

[42] (к стр. 324). Декарт первый дал классификацию алгебраических кривых, необходимую ему и для того, чтобы при решении алгебраических задач и уравнений выбирать подходящие кривые (ср. прим. 78). Правильно связав разделение кривых на роды с порядком их уравнений, Декарт, однако, относит к n-му роду кривые со степенями уравнений $2n$ и $2n-1$. Эта лишенная научного значения классификация была принята Декартом вероятно потому, что он считал возможным сведение уравнений 6-й, 8-й и т. д. степеней к уравнениям 5-й, 7-й и т. д. степеней, — подобно тому как это имеет место для уравнений 4-й и 3-й степеней (см. стр. 326 настоящего издания), а также потому, что местом к 3 или 4 прямым служит линия с уравнением 2-й степени или прямая, место к 8 прямым — линия с уравнением 4-й или 3-й степени и т. д. (Ср. письмо к Гоолю от января 1632 г., Oeuvres, т. I, стр. 233—234). Несколько далее Декарт утверждает, что род кривой не зависит от выбора системы координат (ср. прим. 44).

Современная классификация плоских линий по числу возможных точек пересечения с прямой, т. е. по степеням их уравнений, дана была И. Ньютоном в „Перечислении кривых третьего порядка“ (1704; см.: И. Ньютон, Математические работы, пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского, М.—Л. 1937, стр. 194).

[43] (к стр. 324). Далее у Декарта следует первый пример составления уравнения кривой по ее свойству. Здесь, как и в начатом, но еще не доведенном до конца разборе задачи Паппа, одна прямая — горизонтальная — берется за ось y, и на ней выбирается начало отсчета; расстояния точек кривой от нее, отмеряемые в некотором направлении, обозначаются x. В данном примере система берется прямоугольной. Вторая ось не проводится. Начиная с этого примера, координаты неизменно обозначаются x и y.

Термины „абсцисса“ и „ордината“ в „Геометрии“ Декарта еще не употребляются. Вместо них служат названия segmens de diametre и appliqué par ordre (в латинском издании quae ad diametrum ordinatim adplicantur). Эти названия были связаны с греческой терминологией: Аполлоний называл сопряженные с диаметром конического сечения параллельные хорды „по порядку проведенными“, а отрезки диаметра между его концами и точками пересечения с сопряженными хордами — „отсекаемыми на диаметре по порядку проведенными“ линиями. В латинском переводе Ф. Коммандино (1566) эти обороты речи переданы были через ordinatim applicatae и quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur. Отсюда и терминология Декарта. В переписке Декарт иногда применял и слово ordonnée. Слова „абсцисса“ и „ордината“ ввел в употребление Лейбниц (в 1675 и 1684 гг.; см.: Leibnizens mathem. Schriften, Halle, 1859, т. V, стр. 123), ему же принадлежит слово „коор-

динаты" (1692; там же, стр. 268) и понятие о криволинейных координатах.

Применение координатного метода ветречается впервые в рукописях Декарта об овалах от 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 310 и сл.).

Об отрицательных координатах см. прим. 69.

Вторая ось введена была впервые в 1730 г. в „Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes" Кл. Рабюеля (1669—1728). Там же было впервые в печати сформулировано правило знаков координат в разных четвертях.

44 (к стр. 325). Неясно, обладал ли Декарт полным доказательством теоремы об инвариантности порядка кривой относительно преобразования системы прямолинейных координат. В комментарии Скаутена теорема эта была подвергнута более подробному рассмотрению. Он переносит, как сказали бы мы, начало координат в точку $(-a, 0)$ и вращает систему по часовой стрелке на угол φ, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ (ось абсцисс горизонтальна). Далее он выражает новые ординату и абсциссу через старые; приводимые им выражения $\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ принимают современный вид при введении тригонометрических функций (так стал поступать лишь Эйлер, 1707—1783). Отсюда почти сразу видно, что род кривой не изменится.

Преобразование Скаутена не является наиболее общим, однако он понимал ясно, что при других преобразованиях рассуждения не меняются: „Это можно было бы,—писал он,—показать таким же образом и для всяких других заданных по положению прямых линий, если бы мы не стремились быть по возможности краткими" (Geometria, стр. 178; ср.: Г. Вилейтнер. Хрестоматия по истории математики, пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, М., 1936, стр. 149).

45 (к стр. 325). Скаутен дает построение этой гиперболы и ее асимптот и приводит другие примеры составления уравнений линий (Geometria, стр. 171—175).

46 (к стр. 326). Кривая, возникающая, когда движущейся линией является парабола с диаметром KB, имеет уравнение

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy,$$

которое Декарт приводит на стр. 339. Принадлежит она, по терминологии Ньютона, к „трезубцам" (И. Ньютон, Математические работы, стр. 205; иногда ее называют „параболой Декарта"). Правильно выведя уравнение „трезубца", Декарт по недосмотру пришел к неверному заключению, что род описываемой кривой вообще на единицу выше,

чем род кривой движущейся. Действительно, пусть в подвижной системе координат с началом L уравнение данной кривой CK есть $f(x', y)=0$, причем $BL=x'$, $BC=y$. Тогда из подобия треугольников CBL и GAL следует, что абсцисса $x=AB$ точки описываемой кривой GCE в неподвижной системе координат с началом A удовлетворяет уравнению $x'=\frac{xy}{a-y}$, так что уравнение GCE будет $f\left(\frac{xy}{a-y}, y\right)=0$. Уравнение „трезубца“ получится при $a=2a'$ и $y^2=a(a-x')$. Ошибку Декарта отметил в одном частном случае еще Ферма (Oeuvres de Fermat, т. I, стр. 121—122). Цейтен справедливо отметил, что способ описания кривых, предлагаемый здесь Декартом, „взят из построения конхоиды, для которой движущейся кривой является окружность с центром в точке пересечения вращающейся прямой и оси абсцисс“. (См.: Г. Г. Цейтен. История математики в XVI и XVII вв., пер. П. Новикова, под ред. М. Выгодского. М.—Л., 1938, стр. 220. Далее цитируется: Цейтен, ч. II). (Ср. прим. 109).

47 (к стр. 328). Когда коэффициенты уравнения — многочлены, Декарт объединяет их фигурной скобкой или вертикальной чертой, располагая друг под другом отдельные члены, или же просто выписывает их указанным образом без какого-либо объединяющего знака. Употребление скобок восходит к Штифелю. Односторонняя фигурная скобка применялась Виетом. Круглую скобку Декарт употреблял под знаком радикала (см. прим. 7). В повседневное употребление круглые скобки ввел Лейбниц.

48 (к стр. 329). В оригинале: se trouvoit nulle, ou moindre que rien.

49 (к стр. 329). О замене $\frac{dezz+cfgz-bcgz}{ez^3-cgzz}$ на $\frac{2n}{z}$ Вилейтнер писал: „Несмотря на свое первоначальное замечание, что нет надобности в соблюдении однородности выражений, Декарт все-таки обозначает отвлеченное число как отношение отрезков $\frac{n}{z}$. Но здесь это имеет то основание, что он все время имеет в виду геометрическое построение отрезка y по данному x. Поэтому естественно, что он считает более удобным выражение типа $\frac{n}{z}x$, которое немедленно может быть построено“ (Г. Вилейтнер. Как рождалась современная математика, пер. А. А. Мочульского, под ред. А. Я. Хинчина. М., 1933, стр. 44).

50 (к стр. 329). Знак минус перед $\frac{p}{m}$, отсутствующий в оригинальном и латинских изданиях, поставлен П. Таннери (Oeuvres, т. VI, стр. 399). Однако в изданиях Скаутена ошибки нет, так как под радика-

лом в выражении для y у него стоит $\sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$ (Geometria, стр. 27—28).

51 (к стр. 331). Получив в системе координат, в которой осью абсцисс служила прямая AB, началом точка A, и ординаты брались параллельно BC, уравнение кривой в виде

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$

Декарт меняет систему координат. За новую ось абсцисс он принимает MN, диаметр кривой, сохраняя прежнее направление ординат; при этом все ординаты уменьшаются на величину $m - \frac{n}{z}x$. Абсциссы Декарт умножает на постоянную $\frac{a}{z}$. Начало будет находиться теперь в I, точке пересечения прямой MN с прямой (отсутствующей у Декарта), проходящей через A параллельно ординатам. Эти преобразования можно записать уравнениями

$$LC = y' = y - \left(m - \frac{n}{z}x\right), \qquad IL = x' = \frac{a}{z}x.$$

В новых координатах x', y' уравнение приняло бы вид

$$y' = \sqrt{mm + \frac{ozx'}{a} - \frac{pzz}{maa}x'x'},$$

но Декарт пользуется уравнением

$$LC = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$

связывающим y' и x.

Далее следует подробный анализ этого уравнения, показывающий, что место к 3 или 4 прямым или кривая первого рода есть коническое сечение. В 1649 г. Декарт вернулся к задаче Паппа в связи с некоторыми возражениями Роберваля. Большинство этих возражений было неосновательно. Но в одном пункте Роберваль углубил исследование Декарта. Он подробнее рассмотрел вопрос о возможности нахождения точки C в 4 разных углах и пришел к выводу, что геометрическое место может представлять собой два разных конических сечения. Для нас это ясно из уравнений $d_1d_2 = +\lambda d_3d_4$ и $d_1d_2 = -\lambda d_3d_4$ (см. прим. 32). См. переписку по этому вопросу в Oeuvres, т. V, стр. 373, 394—397

и замечания Таннери (там же, стр. 422—423). Ранее, в 1639 г., Декарт возможность такого случая отрицал (Oeuvres, т. II, стр. 576, 580).

52 (к стр. 331). Таннери указал, что „слова в квадратных скобках, написанные по недосмотру, были опущены Скаутеном в издании 1659 г.“ (Oeuvres, т. VI, стр. 401).

53 (к стр. 331). Хотя Декарт хорошо знал, что уравнение первой степени принадлежит прямой, он не выписал такое уравнение отдельно и его не исследовал. Однако у Декарта нет представления о „вырождении“ кривой второго порядка в пару прямых. Не встречается и указаний на возможность вырождения кривой в точку.

Ферма начал свое „Введение в изучение плоских и телесных мест“ (написанное около 1636 г., но изданное лишь в 1675 г.) с рассмотрения уравнения прямой. Утверждение, что уравнение прямой — первой степени, высказал в печати впервые Дебон в 1649 г. (Geometria, стр. 127). Дебон указал также впервые, что уравнения $x = c$ или $y = c$ выражают прямые, параллельные — по нашей терминологии — осям координат (там же, стр. 130).

54 (к стр. 331). Таннери указал, что „в этом втором случае прямая IL, как не пересекающая коническое сечение, не рассматривалась тогда как диаметр“ (Oeuvres, т. VI, стр. 401).

55 (к стр. 331). Прямая сторона (costé droit, latus rectum) конического сечения (термин восходит к Аполлонию) численно равна нашему удвоенному параметру. Слово „параметр“ ввел в учение о конических сечениях Мидорж (1631); его параметр был вдвое больше нашего.

56 (к стр. 332). Здесь и далее Декарт ссылается на „Конические сечения“ Аполлония, теоремы и определения которых являлись предпосылкой его исследованиям. Декарт не определял конические сечения теми или иными свойствами с целью вывода их уравнений и дальнейшего изучения кривых с помощью анализа уравнения. Он идет здесь обратным путем, показывая, что уравнение второй степени выражает известные свойства какого-либо из конических сечений (ср. прим. 59).

Скаутен снабдил этот текст Декарта подробнейшими комментариями и дал построение соответствующих кривых (Geometria, стр. 181—225).

57 (к стр. 333). Поперечная сторона (costé traversant, latus transversum) есть диаметр конического сечения (не обязательно главный). Этот термин также восходит к Аполлонию.

58 (к стр. 334). Декарт прошел мимо случая, когда уравнение второй степени не содержит y^2 и x^2. Этот пробел частично восполнил Дебон, показавший, что уравнение соответствующего вида представляет гиперболу. У Дебона было выписано 17 различных форм этого уравнения в зависимости от различных комбинаций знаков коэффициентов, или их обращения в нуль, но отсутствовали случаи, когда все коэффи-

циенты положительны, а также $xy=0$. Впрочем, писал Дебон, он мог бы вывести все 17 форм из одной

$$xy+cy+bx-df=0.$$

Дебон заметил, что такое уравнение не может получиться при рассмотрении классической задачи Паппа о месте к 3 или 4 прямым; оно характеризует место точек, для которых произведение расстояний от двух взаимно перпендикулярных прямых пропорционально расстоянию от третьей (Geometria, стр. 127—130; ср. прим. 32).

Дебон послал свои замечания Декарту в начале 1639 г. Декарт полностью одобрил их содержание. 20 февраля 1639 г. он писал Дебону: „Я поистине могу сказать, что не нашел в них ни одного слова, с которым бы не был вполне согласен". Далее Декарт писал, что обнаруженный Дебоном пробел был плодом недосмотра: „Кроме того я пропустил случай, когда нет yy и имеется лишь xy вместе с некоторыми другими членами, что всегда дает в качестве места гиперболу, для которой линия, названная мной AB, есть асимптота или параллельна асимптоте. И в уравнении [стр. 329 этого издания], из которого я сделал образец для всех прочих, нет члена, составленного из известных величин; это хорошо для вопроса Паппа, ибо такой член никогда не получается тогда по способу, каким я его привел; но для того, чтобы ничего не было пропущено касательно мест, таковой следовало поставить". Указав затем на некоторые другие допущенные им пропуски („я не дал анализа этих мест, а только их построение", и др.), Декарт прибавлял: „Впрочем, могу уверить, что все это я пропустил намеренно, кроме случая с асимптотой, про который забыл" (Oeuvres, т. II, стр. 510—511). Этот случай, вероятно, имел в виду Декарт, когда 31 марта 1638 г. писал Мерсенну: „Впрочем, один случай, из числа наиболее легких, я пропустил в силу его чрезмерной простоты... Мне легко будет добавить о нем в трех словах во втором издании" (Oeuvres, т. II, стр. 84). К этому мнению склонялся Таннери (Oeuvres, т. VI, стр. 725).

В январе 1638 г. Декарт мог узнать о своем пробеле по ставшей ему доступной рукописи „Введение в изучение плоских и телесных мест" Ферма, где имелся разбор уравнения гиперболы, отнесенной к асимптотам (ср.: Oeuvres, т. I, стр. 508).

59 (к стр. 334). В теореме 13 книги I „Конических сечений" Аполлоний показывает, что замкнутое плоское сечение косоугольного кругового конуса обладает следующим свойством: квадрат полухорды, сопряженной с некоторым диаметром, равен прямоугольнику, построенному на прямой стороне и отрезке диаметра между вершиной и этой полухордой, уменьшенному на прямоугольник, одна из сторон которого есть тот же отрезок диаметра, а другая относится к первой, как пря-

мая сторона к диаметру. Это свойство лежит по существу в основе всех дальнейших исследований, относящихся к эллипсу; в дальнейшем оно распространяется на любые диаметры и сопряженные с ними хорды. Если начало координат взять в левой вершине диаметра, принятого за ось OX, ординаты взять параллельными сопряженным хордам, обозначить прямую сторону l и длину диаметра d, то сейчас же получается уравнение эллипса

$$y^2 = lx - \frac{l}{d}x^2.$$

В теоремах 11 и 12 выведены были аналогичные свойства гиперболы и параболы, выражающиеся соответственно уравнениями

$$y^2 = lx + \frac{l}{d}x^2 \quad \text{и} \quad y^2 = lx.$$

Постоянное применение Декартом и Ферма косоугольных координат было связано с тем, что определяющие свойства конических сечений Аполлоний вывел для произвольных диаметров и сопряженных хорд. Несколько далее у Декарта следует первый образец уравнения кривой второго порядка с числовыми коэффициентами. См.: Г. Вилейтнер. Хрестоматия по истории математики, стр. 124—130 и перевод первой книги „Конических сечений“ Аполлония, опубликованный Ив. Ягодинским в Изв. Северокавк. Гос. унив., т. III (XV), 1928.

60 (к стр. 337). В одном из примеров Скаутена требуется внутри равностороннего треугольника найти точку, для которой сумма перпендикуляров, опущенных на стороны, равна высоте. Осью абсцисс служит основание, начало берется в левой вершине, ординаты суть перпендикуляры к основанию. Для определения точки, — писал Скаутен, — нужны два условия — уравнения, а так как при решении задачи для x и y никаких условий не получается, точку можно брать внутри треугольника где угодно (Geometria, стр. 229). Заменяя сумму перпендикуляров некоторой комбинацией суммы и разности, Скаутен распространяет задачу и на случай, когда точки берутся вне треугольника.

В качестве кривой поверхности, возникающей при недостаче двух условий, Скаутен приводит гиперболоид вращения, все точки которого обладают одним свойством: разность расстояний их от двух данных точек, фокусов образующей гиперболы, постоянна (Geometria, стр. 233). Развивая далее ту же мысль, Скаутен говорит, что при недостаче трех условий местом является тело. В примере требуется найти точку внутри тетраэдра, для которой сумма перпендикуляров, опущенных на его грани, равна его высоте. Как и в аналогичной плоской задаче, при решении получается тождество: требование выполняется для любой точки, и местом служит ограниченная часть пространства. При введении некото-

рых разностей и здесь получается случай, когда точки лежат вне тетраэдра.

В связи с последней задачей Скаутен мимоходом указал на способ аналитического определения положения точки в пространстве: „для определения этой точки требуются три корня или неизвестные величины, из которых одна служит для определения длины перпендикуляра, опущенного из искомой точки на одну из плоскостей, а другие две — для определения места этого перпендикуляра в этой же плоскости“ (стр. 233—234). Однако Скаутен, как и Декарт, не построил пространственную систему координат: их внимание целиком было поглощено вопросами плоской геометрии. Нет у Скаутена и уравнения поверхности.

Ф. Лагир (1640—1718), у которого в 1679 г. встречается уравнение поверхности, мог непосредственно отправляться от „Геометрии“ Декарта и комментария Скаутена. Он даже получает это уравнение в примере с двумя „недостающими условиями“ (Г. Вилейтнер. Хрестоматия, стр. 150—152). Ср. прим. 77.

61 (к стр. 337). Здесь в оригинале Декарта явная описка — les lignes cherchées, — исправленная Скаутеном на datae lineae (Geometria, стр. 35).

62 (к стр. 339). Таннери сделал здесь следующее замечание: „Декарт очень ясно объясняет свое решение для рассмотренного им первого простого случая места к пяти прямым. Но что касается второго случая, то сказанное Декартом страдает неясностью, — вероятно, намеренной а при буквальном понимании — даже не точно. Предположив, что место отнесено к диаметру (допустим, оси x) и сопряженной оси, проходящей через вершину (оси y), он говорит, что ординаты y равны ординатам конического сечения, абсциссы z которого образуют с соответствующими абсциссами x геометрического места постоянное произведение, скажем, m^2. Другими словами, тогда было бы

$$y^2 = 2pz - \frac{p}{a} z^2, \qquad zx = m^2.$$

Но понятно, если только не принять член с z^2 равным нулю, то уравнение будет относительно x и y 4-й, а не 3-й степени, как это должно быть для места к пяти линиям; а с другой стороны, если коническое сечение есть просто парабола $y^2 = 2pz$, то уравнение места примет вид $xy^2 = k^3$, что нельзя привести к виду, изучаемому Декартом.

Он должен был взять 4 прямые, параллельные симметрично относительно оси x и принять пересекающую их прямую за ось y. Тогда уравнения пяти прямых будут

$$y - a = 0, \quad y + a = 0, \quad y - b = 0, \quad y + b = 0, \quad x = 0,$$

а уравнение геометрического места

$$x(y^2 - b^2) = m(y^2 - a^2).$$

Полагая $ma^2 = b^2c$, $c - m = n$, $x = c + x'$, это уравнение можно привести к виду

$$y^2 = \frac{b^2x'}{x' + n}.$$

Полагая затем $x' + n = \frac{n^2}{z}$, имеем $y^2 = \frac{b^2}{n}(n - z)$. Таким образом, мы действительно приходим к уравнению параболы; но только абсциссы геометрического места отсчитываются не от вершины, как говорит Декарт, а от точки пересечения оси x с перпендикуляром, служащим асимптотой для двух ветвей кривой“ (Oeuvres, т. VI, стр. 725).

63 (к стр. 340). Текст этого абзаца не вполне ясен. Общий смысл ответа на вопрос, стоящий в заголовке, таков, что в геометрии следует допускать те линии, все точки которых можно построить единым и непрерывным движением и координаты которых, соответственно, связаны одной и той же алгебраической зависимостью. В случае же механических кривых лишь некоторые принадлежащие им точки, для них не характерные, „могут быть определены какой-либо более простой мерой, чем та, которая требует для получения всей линии“. Ср. прим. 38.

64 (к стр. 340). У Декарта сказано: pour determiner l'esgalité ou la difference. В переводе Скаутена: ad determinandam summam vel differentiam, т. е. для определения суммы или разности (Geometria, стр. 39). Таннери полагал, что следует читать „для определения равенства суммы или разности“ (Oeuvres, т. VI, стр. 412).

Изучением кривых, образуемых при помощи точек-фокусов и закрепленных в них или свободно их огибающих нитей, занимались позднее: в 1686 г. Э. В. Чирнгауз (1651—1708), в 1688 г. Н. Фацио де Дюилье (1664—1753) и в 1696 г. Г. Ф. де Лопиталь (1661—1704) (см.: „Анализ бесконечно малых“ последнего, М., 1935, пер. Н. Леви, стр. 394—395).

65 (к стр. 341). Декарт полагал, что выразить длину окружности через радиус алгебраически невозможно и что вообще нельзя алгебраически выразить через единичный отрезок длины дуг и других геометрических, т. е. алгебраических, кривых. Если не считать исследований, связанных с измерением окружности, то первым удалось произвести спрямление логарифмической спирали ($\rho = e^{k\varphi}$), открытой почти одновременно Декартом и учеником Галилея Э. Торичелли (1608—1647). Декарт нашел эту кривую в 1638 г., решая одну задачу механики (Oeuvres, т. II, стр. 232—233); основным свойством служило то, что

радиус-векторы пересекают касательные в их концах под постоянным углом. В письме к Мерсенну от 12 сент. 1638 г. Декарт сообщил, что длина дуги этой спирали пропорциональна радиус-вектору конца дуги. Вероятно, этот результат Декарт получил, рассматривая бесконечно-малый прямоугольный треугольник со сторонами ds, $d\rho$, $\rho d\varphi$ и постоянным по определению углом между ds и $d\rho$. Тот же результат найден был вскоре Торичелли. Около 1657 г. Хр. Рену (1637—1723), Ферма и Г. ван Гейрету (род. 1633) удалось произвести спрямление другой трансцендентной кривой — циклоиды. Первое алгебраическое выражение для длины дуги алгебраической кривой — именно полукубической параболы $ay^2 = x^3$ — найдено было около 1658 г. В. Нейлем (1637—1670), Гейретом и Ферма. Ранее других был опубликован результат Гейрета в виде письма к Скаутену (Geometria, стр. 517—520).

66 (к стр. 341). В начале этого раздела Декарт намечает по существу целую программу аналитико-геометрических исследований, самим им фактически почти не выполненную (выведение из уравнения линии различных ее свойств). Но за этим следует утверждение, смысл которого недостаточно ясен. Декарт говорит, что, „основываясь только на этом, т. е. на уравнении кривой, возможно найти „почти все", относящееся к квадратурам. О методе квадрирования он, однако, ничего не сообщает.

В письме к Мерсенну от 13 июля 1638 г. (Oeuvres, т. II, стр. 347—250) Декарт без доказательства привел решение поставленной перед ним Ферма задачи об определении некоторых центров тяжести. Сообщаемые им результаты были таковы:

1. Площадь сегмента параболы $y = ax^n$ находится к площади вписанного треугольника с вершиной на конце оси в отношении $\frac{2n}{n+1}$.

2. Объем сегмента соответствующего параболоида вращения находится к объему вписанного конуса в отношении $\frac{3n}{n+2}$.

3. Центр тяжести сегмента параболы делит отрезок ее оси в отношении $\frac{n+1}{n}$.

4. Центр тяжести сегмента параболоида делит отрезок оси вращения в отношении $\frac{n+2}{n}$.

5. Отношение проекции касательной на ось OY к ординате равно n.

Для понимания первых четырех теорем нужно учесть, что Декарт, не придавая отрицательных значений абсциссам, мыслил кривые, „составленные по образцу параболы", симметричными относительно оси OY и при нечетном n. Также поступил в 1659 г. Валлис в случае кубической параболы (через год он заметил свою оплошность) (ср. прим. 69).

Первые четыре теоремы связаны с вычислениями, равносильными определению интеграла $\int_0^a x^n dx$ для любого натурального n. К сожалению, неизвестно, каким путем шел Декарт. „Я, — писал он, — не привожу доказательств всего этого, ибо записать их стоило бы слишком большого труда“, хотя сами решения называет легкими (Oeuvres, т. II, стр. 247—250). Возможно, что Декарт применял здесь метод неделимых, изложенный Б. Кавальери (1591?—1647) в так называемой „Геометрии неделимых“ 1635 г. Таково мнение Таннери и Вилейтнера. В пользу этого свидетельствует и другое письмо Декарта к Мерсенну от 27 июля 1638 г., в котором он дал вывод квадратуры циклоиды (Oeuvres, т. II, стр. 257—263), основанный на методе неделимых; следует заметить, что этот вывод Декарта был отличен от более раннего вывода Роберваля (1634). Неясно, однако, как суммировал Декарт ряд степеней натуральных чисел.

Как бы то ни было, владел своим приемом Декарт весьма уверенно, ибо решил задачи Ферма в двухмесячный срок. В „Геометрии неделимых“ решались задачи, приводящиеся к $\int_0^a x^2 dx$. Более общие теоремы, соответствующие вычислению степенных интегралов до $n = 9$, Кавальери доказал в 1639 г. (опубл. 1647), а в справедливости общего положения о квадратуре кривых $y = ax^n$ (n — натуральное число) полностью убедился в 1641 г., когда узнал о результатах Ферма (см. письмо Кавальери к Мерсенну от 24 ноября 1641 г.; Oeuvres de Fermat, т. IV, стр. 71—81). Для натурального n квадратуру парабол $y = ax^n$ Ферма произвел не позднее 1636 г., а не позднее 1644 г., почти одновременно с Торичелли, обобщил найденное правило на рациональные показатели >0; не позднее 1646 г. Торичелли овладел также случаем любого рационального показателя, это же удалось затем Ферма (опубл. 1679 г.). Ферма опирался при этом на замену криволинейных частей площади прямоугольными и предельный переход (или двойной предельный переход). Основание площади он делил в случае n натурального на равные части, что требовало применения известного ему неравенства

$$\sum_{k=1}^{k=m} k^n > \frac{m^{n+1}}{n+1} > \sum_{k=1}^{k=m-1} k^n,$$

а для общего случая на отрезки, абсциссы концов которых образуют геометрическую прогрессию, — это сводило квадратуру к суммированию бесконечной убывающей геометрической прогрессии (Oeuvres de Fer-

mat, т. II, стр. 73, 74, 81, 82 и т. I, стр. 255). О дальнейшем развитии интеграционных приемов см.: Цейтен, ч. II. (О методах касательных см. прим. 67).

67 (к стр. 342). Вопрос о проведении нормалей к кривым был у Декарта тесно связан с его занятиями оптикой, причем речь шла не об отыскании уравнения нормали, но о ее построении. Этой задаче Декарт придавал огромное практическое значение. Вместе с тем ее решение должно было служить блестящим показателем силы метода Декарта. Овладел своим приемом Декарт не позднее 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 310—328, 335—342).

Построение нормали в „Геометрии" носит алгебраический характер и основано на методе неопределенных коэффициентов, — другом крупнейшем открытии Декарта. Чтобы построить нормаль в точке $M(a, b)$ кривой Декарт ищет точку $N(c, O)$ пересечения нормали с осью абсцисс. Уравнение окружности с центром в N и радиусом NM будет $(x-c)^2+y^2=(a-c)^2+b^2$. Если NM есть нормаль, то точки пересечения окружности с кривой, соседние с M, должны слиться с последней. Координаты общих точек окружности и кривой найдутся при совместном решении их уравнений. При совпадении точек в M корень x уравнения, получающегося при исключении y, будет по крайней мере двукратным, а это наложит на искомую величину c некоторое определяющее ее условие.

Для определения c Декарт применил метод неопределенных коэффициентов, основанный на том, что из тождества двух целых алгебраических многочленов следует тождество их коэффициентов при членах одинаковой степени. Так как уравнение для абсцисс точек пересечения окружности и кривой должно иметь двукратный корень $x-a$, то левая часть его должна содержать множитель $(x-a)^2$. Декарт приравнивает эту левую часть произведению из $(x-a)^2$ на многочлен со степенью на 2 меньшей, чем эта левая часть, и с неопределенными коэффициентами. Сравнивая затем члены одинаковой степени, он получает уравнения, позволяющие найти введенные неопределенные величины и связанную с ними искомую c. Понятно, как важно было в этой связи для Декарта записывать уравнения в приведенном виде $f(x)=0$.

Прием Декарта удобнее применять к построению касательной, находя условие, при котором сливаются две точки пересечения данной кривой и прямой, уравнение которой лишь первой степени. Такой способ изложил Скаутен (Geometria, стр. 246—247). Иногда его можно встретить и в учебниках нашего времени.

Связанная с декартовым приемом построения нормалей задача об отыскании кратных корней алгебраических уравнений привела И. Гудде к интересным исследованиям, также приложенным в латинском издании

„Геометрии“. Для нахождения двукратных корней уравнения $f(x)=0$ Гудде определял по существу общий делитель уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$; при этом $f'(x)$ у Гудде заменяло выражение, составленное путем умножения членов данного уравнения на члены какой-либо арифметической прогрессии, в частности прогрессии n, $n-1$, ..., 1, 0, где n — степень $f(x)$ (Geometria, стр. 433—434). Свое правило Гудде распространил на случай трехкратных корней (стр. 435), а также использовал для отыскания экстремумов (стр. 509) (ср.: Цейтен, ч. II, стр. 340—342).

Метод неопределенных коэффициентов Декарт применил, по всей вероятности, еще к решению уравнения четвертой степени (см. прим. 97). Более широкое применение этот важный прием получил впервые у Ньютона, который с блеском приложил его к разложению функций в степенные ряды, к обращению рядов, интегрированию дифференциальных уравнений и пр., а затем и у Лейбница.

Декарт ясно понимал, что его прием построения нормалей пригоден в прямолинейных координатах только для алгебраических линий. В переписке Декарт разработал и другие приемы решения задачи на нормали и касательные, которые применил и к другим кривым.

В январе 1638 г. Декарт познакомился через Мерсенна с методом максимумов и минимумов, а также с методом проведения касательных, предложенным Ферма. Метод касательных, изобретенный Ферма не позднее 1629 г., по существу состоял в разыскании подкасательной с помощью соотношения, равносильного современному $s_t=\frac{ydx}{dy}$; при этом для вычисления $dy=df(x)$ Ферма пренебрегал в разности $f(x+h)-f(x)$ членами со степенями h выше первой (экстремумы Ферма находил, отбрасывая в равенстве $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$, члены, содержащие степени h). Некоторые неясности в мемуаре Ферма вызвали ряд возражений Декарта, ответных разъяснений, интересных задач (например о проведении касательной к так называемому „декартову листу“ $x^3+y^3=axy$, о так называемых краевых экстремумах и др.). В споре между Декартом и Ферма приняли участие и другие ученые: Роберваль, Э. Паскаль, Ж. Дезарг (см. прим. 77), Кл. Гарди (ум. 1678). Для разработки идей и методов дифференциального исчисления спор этот оказался весьма плодотворным. Размышляя над этими проблемами, Декарт выдвинул и новую точку зрения на касательную. До того касательная определялась, как и в древности, как прямая, имеющая одну общую точку с кривой; в некоторых письмах Декарт трактует ее как предельное положение секущей, вращающейся вокруг некоторой точки вне кривой так, что ее точки пересечения с кривой сливаются в одну, или же секущей, вращающейся вокруг одной

из точек пересечения с кривой. В своих выкладках Декарт применял при этом и отбрасывание членов с высшими степенями приращения аргумента.

В письме к Мерсенну от 23 августа 1638 г. Декарт дал также построение касательной к циклоидам, основанное на рассмотрении кривой как многоугольника с бесчисленным множеством сторон и на идее о мгновенном центре вращения (нормаль к циклоиде должна пройти через точку касания соответствующего положения образующего круга с основанием циклоиды). Прием Декарта, пригодный и для других кривых, образуемых при качении, был в более совершенной форме изложен затем Гюйгенсом в 1673 г. Почти одновременно построение касательной к циклоиде дали Роберваль, опиравшийся на сложение скоростей по правилу параллелограмма (см. прим. 72), и Ферма.

Метод Ферма, разумеется, обладал большей общностью и содержал подлинные ростки дифференциального исчисления.

См. переписку Декарта в кн.: Р. Декарт. Геометрия. М.—Л., 1938, стр. 157 и сл., а также: Цейтен, ч. II, стр. 333 и сл.

68 (к стр. 344). В этом примере речь идет об уравнении вида $y = f(r - c)$, где $y = AM$ — декартова координата, а r — радиус-вектор точки кривой относительно лежащей на оси y точки F. Кривая принадлежит к овалам Декарта, о которых он говорит несколько далее. Если положить $FC = r$, $GC = r_1$, то из определяющего свойства $\frac{CF - FA}{GA - GC} = \frac{d}{e}$ следует уравнение кривой в биполярной системе $er + dr_1 = ce + db$ (см. прим. 72). Через z Декарт обозначает далее $CF - FA$.

69 (к стр. 346). У Декарта — renversée, у Скаутена — inversa (Geometria, стр. 45). Таким образом, ординаты, расположенные по обратную сторону от оси абсцисс, соответствуют здесь отрицательным числам. Однако, как было сказано, отрицательные абсциссы Декарт не рассматривал (ср. прим. 66). Так же поступали Ферма, де Витт, да и некоторые позднейшие математики. С этим нередко связано было неточное или неполное вычерчивание кривых по уравнениям или данным свойствам; Ньютон в „Перечислении кривых третьего порядка“ (1704) учитывал знаки обеих координат уже вполне точно.

70 (к стр. 352). Скаутен сопроводил это место обширным комментарием. Выведя уравнение конхоиды, при $BH = x$ и $HC = y$, $AB = b$ и $CE = c$, получающее вид

$$x^2y^2 = b^2c^2 + 2bc^2y + (c^2 - b^2)y^2 - 2by^3 - y^4,$$

он сперва дает доказательство построения общим способом Декарта. Приводит он и доказательство „по способу Ферма“, в котором требует,

чтобы отрезок PC (P — точка пересечения нормали и DA) был минимальным (Geometria, стр. 249—255). На стр. 258 и сл. Скаутен еще приводит доказательство построения касательной в точках перегиба, предложенного Хр. Гюйгенсом (1629—1695). Опирается он на то, что в точке перегиба сливаются три точки пересечения конхоиды и прямой, так что соответствующее уравнение имеет тройной корень. Впервые способ нахождения точек перегиба нашел Ферма (он находил для этого экстремум угла касательной к кривой с осью абсцисс).

Цейтен полагает, что построение нормали к конхоиде Декарт получил с помощью инфинитезимальных рассуждений (см. прим. 72).

[71] (к стр. 352). Катоптрика — часть оптики, изучающая законы отражения света; диоптрика изучает законы преломления света. Закон диоптрики о постоянстве для двух данных сред отношения синусов углов, образуемых с нормалью преломляемым и преломленным лучами, был открыт около 1620 г. В. Снеллиусом (1581—1626) и независимо, но позднее Декартом, — вероятно, около 1627 г. Он изложен в „Диоптрике“.

[72] (к стр. 353). Положим данные отношения $\frac{A6}{A5}=\frac{m}{n}$, $AF=p$, $AG=q$, примем за полюсы биполярной системы координат точки F и G, точку 1 назовем M и обозначим $MG=r_1$ и $MF=r_2$. Тогда

$$r_1=MG=K6=AK-A6=q-A6=q-\frac{m}{n}A5$$

и

$$r_2=MF=F5=AF+A5=p+A5.$$

Следовательно,

$$nr_1+mr_2=mp+nq=\text{const}.$$

Если считать радиус-векторы r_1, r_2 положительными, взять $k<1$ и обозначить расстояние между фокусами d, то биполярные уравнения всех четырех видов овалов можно записать в виде

$$(1)\quad r_1+kr_2=q+kp,\quad q+p=d,$$

$$(2)\quad r_1-kr_2=q-kp,\quad q+p=d,$$

$$(3)\quad r_1-kr_2=q-kp,\quad q-p=d,$$

$$(4)\quad r_1+kr_2=q+kp,\quad q-p=d.$$

Таннери указал, что классификация Декарта, отвечавшая его специальным целям, лишена теоретического значения. Существует лишь два вида овалов, причем встречаются они сопряженными парами, каждая из которых выражается одним уравнением (четвертой степени в прямолинейных координатах и линейным в биполярных), если допу-

стить отрицательные значения радиус-векторов. Одна из кривых (сердцевидная; 2-й и 3-й роды Декарта) всегда объемлет другую, подлинный овал (3-й и 4-й роды), если только все три фокуса (один внешний, два внутренних) находятся на конечных расстояниях. Наличие трех фокусов было известно Декарту (в рукописном наследии; это свойство вновь открыл М. Шаль, 1793—1880). Овалы 3-го и 4-го рода геометрически тождественны с овалами 2-го и, соответственно, 1-го родов. Различие, устанавливаемое Декартом, связано только с выбором фокусов, служащих полюсами. Так, овал, принадлежащий к 1-му роду при отнесении его к внешнему и внутреннему фокусам, оказывается овалом 4-го рода, если отнести его к двум внутренним фокусам. При удалении одного фокуса в бесконечность кривая будет коническим сечением; при совпадении двух фокусов — улиткой Паскаля (см. замечаиия Таннери в „Oeuvres“ Декарта, т. X, стр. 325—328).

Для Декарта важны были излагаемые далее свойства нормалей к овалам. Нормаль в точке M образует с обоими радиус-векторами углы, синусы которых относятся, как m к n, так что если овал разделяет две среды с показателем преломления $\frac{m}{n}$, то все лучи, исходящие из одного фокуса F, будут по преломлении встречаться в другом фокусе G. В связи с этим позднее овалы получили наименование апланатических, т. е. неотклоняющих кривых. О значении их для оптики см. примечания к „Диоптрике“. Об истории их исследования и иных свойствах — в кн. Лориа (G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente Kurven, t. I, Leipzig, 1911).

Декарт нашел овалы около 1629 г. при поисках кривых, обладающих указанным оптическим свойством (Oeuvres, т. X, стр. 310—328). Восстанавливая ход мыслей Декарта, Цейтен принимает, что последний знал, что величины, которые мы могли бы обозначить через dr_1 и dr_2 и которые пропорциональны проекциям скорости точки, движущейся по кривой, на радиус-векторы, пропорциональны косинусам углов, образуемых с ними касательной, или синусам углов, образуемых нормалью. „В соответствии с этим, — писал Цейтен, — Декарт нашел, что нормаль к кривым, изображаемым уравнениями вида

$$ar + br_1 + c = 0$$

и получившим имя «декартовых овалов», делит угол между радиусами-векторами на части, синусы которых относятся, как b к a. Несомненно, что он первоначально получил этот результат, исходя из прямых геометрических инфинитезимальных соображений, а не из тех пространных выкладок, на которых он обосновал его в своей «Геометрии», следуя своему общему алгебраическому методу... Иначе он вряд ли, не

имея заранее готового простого результата, довел бы до конца сложные выкладки. Сверх того, нужно принять во внимание, что сам Декарт в другом месте указывает, что к той задаче, которую он поставил себе сначала, этот метод неприменим. Задача, поставленная и решенная Декартом, была задачей, обратной той, которую он решает алгебраическим методом; она формулируется так: найти кривую, нормаль к которой в любой ее точке обладает тем свойством, что отношение между синусами углов, образуемых ею с прямыми, соединяющими точку с двумя данными прямыми, имеет данное значение“ (Цейтен, ч. II, стр. 335—336).

Эти же соображения, по мнению Цейтена, Декарт использовал и при построении нормали к конхоиде. Именно, нормаль будет диагональю параллелограмма, стороны которого, направленные вдоль радиус-вектора CA и отрезка CH, перпендикулярного к асимптоте, обратно пропорциональны скоростям изменения, т. е. бесконечно-малым изменениям AC и CH. Так как, в силу подобия треугольников CHE и ABE,

$$(AC - EC)\,CH = EC \cdot AB,$$

то

$$-\frac{d(AC)}{d(CH)} = \frac{AC - EC}{CH} = \frac{FG}{FC}.$$

Упоминаемая Цейтеном задача о разыскании кривой по данному свойству нормали явилась одной из первых в серии так называемых „обратных“ задач на касательные, равносильных нашим задачам на интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка. Среди этих задач особую известность получила поставленная перед Декартом задача Дебона (найти кривую, у которой отношение подкасательной к ординате равно отношению данной линии к разности абсциссы и ординаты; это соответствует уравнению $y' = \frac{x-y}{b}$). С помощью преобразований, равносильных замене переменных, Декарт фактически свел задачу к интеграции уравнения $y' = \frac{-y}{b\sqrt{2}}$, установил, что кривая „механическая“ и указал в кинематической форме на связь ее свойств со свойствами логарифмов (см. его письмо к Дебону от 20 февраля 1639 г.: Р. Декарт. Геометрия, стр. 192 и сл.). О значении обратных задач на касательные в истории исчисления бесконечно-малых см.: Цейтен, ч. II, стр. 359 и сл.

Декартово обозначение точек цифрами привело впоследствии Лейбница к изобретению индексации букв.

[73] (к стр. 358). Декарт называл фокусы poins brûlans. Слово focus (очаг) ввел в 1609 г. И. Кеплер (1571—1630).

[74] (к стр. 360). Эта запись обозначает

$$b + \frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

[75] (к стр. 361). У Декарта: en un mesme point; у Скаутена: in alio puncto (Geometria, стр. 60).

[76] (к стр. 362). У Скаутена слова „от одной точки к другой" отсутствуют (Geometria, стр. 61).

[77] (к стр. 367). Вопроса о распространении своего метода на линии в пространстве трех измерений Декарт касается очень бегло. Он замечает, что пространственную кривую можно задать с помощью ее ортогональных проекций на две взаимно-перпендикулярные плоскости, и что проекции эти затем можно отнести к оси — общей прямой названных плоскостей. Кроме того, Декарт добавил, что проекции нормали на эти две взаимно перпендикулярные плоскости являются нормалями к проекциям самой кривой. Этими указаниями Декарт и ограничился. Скаутен в своих комментариях не продвинулся далее сколько-нибудь значительно (ср. прим. 60). Как видно, Декарт не ввел явным образом пространственных координат. Нет у него и уравнений поверхностей, в том числе тех цилиндрических поверхностей, с помощью которых он рекомендует определять пространственную кривую.

Насколько мало Декарт продумал вопросы геометрии пространства, свидетельствует его замечание о построении нормали. Он не отметил, что кривая в пространстве обладает, вообще говоря, бесчисленным множеством нормалей, образующих нормальную плоскость. Более того, его замечание несправедливо даже в отношении плоских кривых и, в частности, прямых, рассматриваемых в пространстве. Проекциями касательной будут, действительно, касательные к проекциям кривой (не в этом ли корень ошибки Декарта?), но угол между проекцией нормали и проекцией касательной не будет, вообще говоря, прямым.

Современник Декарта и творец проективной геометрии Ж. Дезарг (1593—1661?) в 1636 г. численно определил положение точки в пространстве посредством трех взаимно-перпендикулярных координат, но не воспользовался им в аналитико-геометрических целях. Ферма в „Введении в изучение поверхностных мест" (Isagoge ad locos ad superficiem, около 1643) также не дал распространения координатного метода на трехмерное пространство; основным содержанием этого сочинения явилось исследование поверхностей второго порядка с помощью сечений и решение некоторых задач, приводящих к таким поверхностям (например место точек, для которых сумма квадратов отрезков, проведенных под

данными углами к нескольким данным плоскостям, есть сфероид; обобщение задачи Паппа с прямых на 3 или 4 плоскости и др.). В другом сочинении Ферма мельком упомянул, что уравнение с тремя переменными представляет собой поверхностное геометрическое место.

Более определенное распространение координатного метода на пространство впервые встречается у Ф. Лагира в 1679 г., записавшего уравнение, возникающее в одной задаче с двумя недостающими условиями (ср. прим. 60) в виде

$$aa + 2\,ax = yy + vv;$$

впрочем, какова эта поверхность (параболоид вращения), Лагир не рассмотрел. А. Паран (1666—1716) вывел уравнение шаровой и некоторых других поверхностей (1705); А. Пито (1695—1771) рассмотрел винтовую линию (около 1724 г.). В конце XVII в. свободно владели идеей пространственных координат Лейбниц и братья Бернулли. Настоящие основы аналитической и отчасти дифференциальной геометрии в пространстве были заложены в „Исследованиях о кривых двоякой кривизны“ (Recherches sur les courbes à double courbure, 1731) А. Клеро (1713—1765).

[78] (к стр. 367). Указания Декарта относительно выбора кривых при построении задач вызвали некоторые замечания Ферма (1660), а затем принципиальную и резкую критику со стороны Ньютона, для которого „линейное построение“ уравнений уже являлось не общим приемом решения алгебраических задач, но только средством разыскания двух-трех первых цифр корня, дальнейшее уточнение которого производится аналитически. „Выбор наших линий для построения задач, — писал Ньютон, — определяется не простотой уравнения, но легкостью описания линий... Если бы в геометрию включена была трохоида (циклоида, — *А. Ю.*), то при ее помощи мы могли бы разделить угол в данном отношении. Станете ли вы упрекать тех, кто применит эту линию для деления угла в отношении двух чисел, упрекать на том основании, что эта кривая не определяется уравнением и что применять должно лишь те линии, которые определяются уравнениями? Если бы дело обстояло так, то для деления угла, например, на 10001 часть мы должны были бы применить кривую, определяемую уравнением более ста измерений и которую не мог бы ни описать, ни еще менее уразуметь ни один смертный. И кто не нашел бы нелепым, если бы этой линии отдали предпочтение перед трохоидой, которая представляет собой хорошо известную линию, легко описываемую посредством движения колеса или круга“ (опубл. 1707; см.: Исаак Ньютон. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе. Изд. АН СССР, 1948, стр. 296—297).

[79] (к стр. 369). У Декарта: „des sommes, composées de plusieurs termes". Впрочем, иногда термин somme означает у Декарта вовсе не сумму и применяется, например, к одночленам.

[80] (к стр. 369). У Декарта: „sont esgaux à rien". Декарт здесь не употребил слова нуль (zero), хорошо знакомого, впрочем, математикам значительно ранее.

Запись алгебраического уравнения в канонической форме $f(x)=0$ случайно встречалась еще у М. Штифеля в 1544 г. Герриот также иногда записывал уравнения в подобном виде, чаще, однако, уединяя с правой стороны свободный положительный член. Систематическое употребление этой, столь важной для формулировки многих теорем алгебры, записи — дело Декарта (ср. прим. 67).

[81] (к стр. 370). Составление уравнений путем перемножения линейных двучленов было хорошо известно Виету (Цейтен, ч. II, стр. 120—121) и было последовательно использовано Т. Герриотом в „Практике аналитического искусства" (Artis analyticae praxis, 1631). Дж. Валлис в 1685 г. заявил, что большинство открытий Декарта содержалось в этом сочинении и обвинил Декарта в плагиате. Однако с книгой Герриота Декарт познакомился лишь после издания „Геометрии". В декабре 1638 г. Декарт писал Константину Гюйгенсу (отцу знаменитого ученого): „Сударь, я так редко обращаюсь к своим книгам, что среди них — хотя у меня их всего лишь с полдюжины — скрывалась, оказывается, незамеченной более шести месяцев одна из ваших книг — это Генриотти... Я хотел увидеть эту книгу, ибо мне говорили, что в ней содержится некое исчисление для геометрии, сходное с моим; я нашел, что это верно, но он углубляется в существо дела столь мало и на множестве страниц учит столь малому числу вещей, что у меня нет оснований иметь претензии к его мыслям за то, что они предупредили меня" (Oeuvres, т. II, стр. 456; см. также стр. 457—461).

Наличие двух корней квадратного уравнения (с положительными корнями!) было известно еще в древности, а трех корней кубического уравнения — уже первым решавшим его математикам: Н. Тарталья (1500—1557), Кардано и другим. Общая теорема о числе корней алгебраического уравнения была высказана А. Жираром в его „Новом изобретении в алгебре" (Invention nouvelle en l'algèbre, 1629), причем он имел в виду и корни мнимые (см. прим. 93). Была ли эта книга знакома Декарту — неизвестно. В письмах Декарта Жирар фигурирует только как издатель сочинений С. Стевина. О возможности такого знакомства говорят пребывание Декарта в Голландии, где издано было сочинение Жирара, и наличие одной общей задачи в обоих трудах; впрочем, эта задача была известна от древних авторов (см. прим. 100).

Условная формулировка теоремы о числе корней уравнения в данном тексте „Геометрии“ („всякое уравнение может иметь“ и т. д.) связана с тем, что пока Декарт имеет в виду действительные корни. Далее он привлекает еще воображаемые корни и формулирует теорему в более общем виде. Истинность теоремы для Декарта и его современников вытекала в случае уравнений с действительными корнями из возможности составить уравнение n-й степени по данным n его корням, а в общем случае из убеждения, что всегда можно примыслить недостающее число „воображаемых“ корней, природа которых, впрочем, долгое время оставалась неясной (ср. прим. 93). Общее доказательство основной теоремы алгебры стремились найти Ж. д'Аламбер (1717—1786), в 1746 г., Эйлер в 1749 г., Лагранж (1736—1813) в 1778 г. и другие. Во всех этих доказательствах имелись те или иные пробелы. Несколько различных, почти вполне строгих доказательств предложил К. Гаусс; первое из них было опубликовано в 1799 г.

82 (к стр. 370). Греческие математики не знали отрицательных чисел. Впервые встречаются отрицательные числа у математиков Китая (не позднее начала н. э.), а затем у индусских математиков: последние уже в VII в. толковали их в некоторых задачах как выражение долга (в противоположность положительным, „имуществу“) и им не чуждо было представление о связи положительных и отрицательных чисел с противоположными направлениями на прямой. Бхаскаре (XII в.) известна была двузначность квадратного корня из положительного числа. В XV в. отрицательные числа начинают встречаться у европейских математиков. Введение новой категории чисел сопровождалось долгой идейной борьбой. Ряд крупнейших ученых не признавали отрицательных чисел и стремились обходиться без них, хотя бы ценой усложнения математических теорий и методов исследования: к ним, например, принадлежали Виет и Герриот. Последний даже пытался доказать, что алгебраические уравнения могут иметь только положительные решения. Но и те математики, которые, осознав пользу отрицательных чисел, применяли их в практике, длительное время толковали их лишь как воображаемые. М. Штифель писал о них, как о нелепых числах (numeri absurdi), существующих только в нашем воображении и тем не менее весьма полезных в математике. Алгебра, — писал он, — „ввиду неограниченности запаса своих средств обычно пользуется и тем, что существует, и тем, что представляется как существующее“; для полноты и целостности арифметики необходимо представлять себе ниже единицы ее доли, а ниже нуля — числа воображаемые. Кардано называл отрицательные числа то „воображаемыми“, „придуманными“ (numeri ficti), то „чистый минус“ (minus purum), в противовес найденным им minus sophisticum, позднее названным „мнимыми числами“, — то

„ложными“ или „воображаемыми“ корнями (radices falsae или fictae). Валлис в 1657 г. рассматривал отрицательные числа как воображаемые (imaginaria), но не абсурдные; в 1685 г. он их вместе с положительными назвал „действительными“ (real), в противоположность мнимым (imaginary).

Подобное отношение к отрицательным числам связано было с тем, что алгебраисты, в ряде важнейших пунктов опиравшиеся на геометрию, не располагали геометрической интерпретацией новой категории чисел. Крупный шаг вперед сделал Жирар, установивший, что „решение с помощью минуса (par moins) объясняется в геометрии возвращением вспять (en rétrogradant) и минус отступает там, где плюс движется вперед“ (1629).

Декарт, следуя в терминологии за учеными XVI в. („ложные числа“), не считал отрицательные числа, означающие недостаток величины, лишь воображаемыми, какими являлись для него числа вроде $\sqrt{-1}$, хотя его понимание отрицательного числа не отличалось ясностью, — например, говоря об отрицательных числах, он всегда имеет в виду абсолютные величины. Геометрически он толковал отрицательные корни как отрезки ординат, расположенные по другую сторону от оси, чем отрезки, изображающие положительные числа (но об отрицательных абсциссах он, как говорилось, нигде в „Геометрии“ не упоминает). Фактически свое равноправие отрицательные числа получили именно в „Геометрии“. В комментариях Скаутена даются пояснения в духе Жирара (Geometria, стр. 283—287; ср. прим. 93); подробно истолковывал реальный смысл отрицательных чисел Валлис.

Интересно отметить, что разбирая около 1629 г. найденное им построение корней уравнения 4-й степени с помощью параболы и окружности (ср. прим. 102), Декарт указал, что при отсутствии точек пересечения кривых уравнение не имеет истинных (verae) корней, но только воображаемые (imaginariae). Истинные корни он при этом подразделил на явные (explicitae) и неявные (implicitae), причем пояснил, как располагаются в обоих случаях выражающие корни отрезки (Oeuvres, т. X, стр. 344—346).

Следует иметь в виду, что когда математики XVII в. говорили о „фиктивности“ или ложности отрицательных чисел, они часто хотели, по существу, сказать, что новое понятие не совпадает с традиционным определением числа (собрания единиц или отношения целых), а вовсе не то, что оно лишено всякого реального содержания. Вместе с тем многие свойства отрицательных чисел вызывали у математиков XVII в. недоумения. Так, Лейбниц усматривал в равенстве $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ парадокс (первый член первого отношения больше второго, а первый член второго отношения меньше второго), который объяснял тем, что

оба эти отношения только воображаемые и что выражение „—1 меньше нуля“ лишь „терпимо истинное“ (toleranter vera).

Обсуждение природы отрицательных чисел и попытки обоснования правил операций над ними интенсивно продолжались в XVIII в. К. Маклореном (1698—1746), Эйлером, д'Аламбером и другими. Не приведя к действительно строгой теории, эти попытки во многом подготовили почву для позднейших исследований. А. Кестнер (1719—1800) уже отметил соотносительность положительного и отрицательного чисел, называя их противоположными количествами и подчеркивая, что безразлично, какое из двух противоположных количеств назвать положительным и какое отрицательным. Идейная борьба вокруг этого понятия при этом продолжалась и в XVIII в. и даже в XIX. В самом конце XVIII в. Л. Карно писал, что „гораздо труднее вразумительно объяснить, что такое изолированное отрицательное количество, чем понять, что такое бесконечно-малое количество, потому что последнее... есть количество действительное, в то время как первое является фиктивным понятием [être de raison], ибо его можно получить лишь путем невыполнимого действия“ („Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых“, пер. Н. Соловьева. М., 1933, стр. 230). Современная трактовка теории отрицательных чисел была дана Н. И. Лобачевским (1792—1856), У. Гамильтоном (1809—1877), Г. Грассманом (1805—1865) и другими в 30-е и 40-е годы XIX в.

Знаки + и — появились в печати в 1489 г. у И. Видмана. Термины numerus negativus и numerus positivus появились в XVI в., — первый из них у П. Рамэ (1515—1572) в 1569 г. Термины nombre négatif и positif применял в 1638 г. де Богран (см.: Oeuvres, т. V, стр. 506).

83 (к стр. 370). Эта важная теорема, для Декарта прямо вытекающая из его способа образования уравнений, формулируется здесь, повидимому, впервые.

84 (к стр. 371). Декарт знал, что при наличии мнимых корней его правило следует формулировать в условной форме („может быть“, а не „есть“), но некоторые современники его, в том числе Валлис, поняли это утверждение как безоговорочное и обвинили его в ошибке. Декарт сам отчасти подал повод к этому недоразумению, не оговорив, когда его правило действует и в первом же примере употребляя его как безусловное. Скаутен отметил, что Декарт заранее ограничивал действие правила только уравнениями с действительными корнями (о которых пока что и идет речь в тексте „Геометрии“); вместе с тем Скаутен показал, как применять правило при отсутствии каких-либо членов (Geometria, стр. 285—287). Более отчетливо сформулировал правило Ньютон во „Всеобщей арифметике“ (1707), приведя там же способ определения числа мнимых корней, опять-таки применимый не всегда. Найти свое правило Декарт

мог, заметив, что умножение многочлена с действительными корнями на $x-a$ увеличивает число перемен знака на 1.

В более полной формулировке правило Декарта гласит: число положительных корней алгебраического уравнения равно или на четное число менее числа перемен знака в ряду его коэффициентов (коэффициенты, равные нулю, не считаются).

Правила Декарта и Ньютона положили начало многочисленным попыткам их доказательства и усовершенствования. Доказательство теоремы Декарта для случая действительных корней дали: в 1728 г. И. А. Зегнер (1704—1777), в 1741 г. де Гюа де Мальв (1712—1785) и другие. Общее доказательство дал Гаусс (1828). Важное правило знаков нашли Ф. Д. Бюдан в 1822 г. и Ж. Б. Фурье (1768—1830; опубликовано в 1831 г.). Полное решение вопроса о числе действительных и комплексных корней дается в теореме Ж. Б. Штурма (1803—1855), опубликованной в 1829—1835 гг.

Первые попытки связать наличие положительных корней с характером коэффициентов уравнения встречаются у Кардано (Цейтен, ч. II, стр. 102—103).

85 (к стр. 372). Приемы увеличения или уменьшения корней на данную величину, как и ряд других приемов линейного или дробно-линейного преобразования корней, были даны еще Виетом в сочинении „Об исследовании и усовершенствовании уравнений“ („De aequationum recognitione et emendatione“), выпущенном после смерти автора в 1615 г. парижским математиком Ал. Андерсоном (ср. также прим. 88). Это дало повод поклоннику и издателю сочинений Виета Ж. де Бограну обвинить Декарта в плагиате (см. большое письмо Бограна Мерсенну, написанное весной 1638 г., в Oeuvres, т. V, стр. 504—509).

Из письма Декарта к Мерсенну в мае 1632 г. видно, что он тогда был уже знаком или познакомился с „Введением в искусство анализа“ Виета (1591), в котором излагались принципы алгебры Виета, и с замечаниями Виета к его видовой логистике (Fr. Vietae ad Logisticen speciosam Notae priores; Oeuvres, т. I, стр. 245 и 248). Судя по тому, что основные идеи „всеобщей математики“ Декарта сложились задолго до 1630 г. и частью в 1619—1621 гг., знакомство с этими сочинениями не было определяющим в его математическом развитии (ср. прим. 6).

Менее ясно, какова была роль первого названного труда Виета. В декабре 1637 г. Декарт писал: „Мнение автора «Геостатики» (т. е. Бограна, — *А. Ю.*) о моих сочинениях трогает меня весьма мало... Относительно же того, что написанное мной могло быть легко взято у Виета, то, напротив, причиной трудного понимания моего трактата является то, что я в нем старался помещать только такие вещи, которые, как я

полагал, не были известны ни ему, ни кому-либо другому. Это можно увидеть, сравнив то, что я написал о числе корней, имеющихся во всяком уравнении, на стр. 372 (стр. 369 настоящего издания, — *А. Ю.*), т. е. на месте, с которого я начинаю приводить правила моей алгебры, и то, что написал об этом Виет в самом конце своей книги „De emendatione aequationum“, ибо тогда увидят, что я определяю это общим образом во всех уравнениях, между тем как он, дав лишь несколько частных примеров, — которым, однако, придал такое значение, что пожелал ими закончить свою книгу, — показал тем самым, что он не мог этого определить общим образом. Таким образом, я начал там, где он кончил; впрочем, я это сделал неумышленно, ибо я больше раз перелистал Виета со времени получения вашего последнего письма, чем это делал когда-либо до сих пор, найдя его случайно здесь у одного из моих друзей. И, между нами, я не нахожу, что он знал об этом столько, сколько я полагал, хотя он и был весьма искусен“ (Oeuvres, т. I, стр. 478—480; ср. также письмо от 31 марта 1638 г., т. II, стр. 82).

Повидимому „De aequationum. . .“ кое в чем послужило для третьей главы „Геометрии“: для Декарта достаточно было перелистать книгу, чтобы заметить в ней интересные для себя вещи. Но, конечно, то, что Декарт мог оттуда позаимствовать, составляло весьма малую часть содержания третьей главы „Геометрии“; что же касается преобразований корней, то они у Декарта изложены много проще, чем у Виета. В заключении „De aequationum. . .“, о котором говорит Декарт, Виет составляет по 2, 3, 4 и 5 положительным корням соответственные уравнения 2-й, ..., 5-й степеней (ср. прим. 94); см. также: Цейтен, ч. II, стр. 119—121. (Ср. прим. 88).

[86] (к стр. 372). Звездочки обозначали у Декарта отсутствие каких-либо членов в уравнении. Они часто употреблялись с той же целью и в XVIII в. Корень, равный 0, Декарт, как видно, не учитывает.

[87] (к стр. 373). Эта формулировка Декарта связана была с тем, что он имел в виду абсолютные значения корней. Богран в письме, упомянутом в прим. 85, писал: „Несомненно, напротив, что нельзя увеличить положительные корни уравнения, не увеличивая отрицательных, ни уменьшить одни, не уменьшая на ту же величину другие“ (Oeuvres, т. V, стр. 506).

[88] (к стр. 374). Линейное преобразование корней кубического уравнения, с помощью которого удаляется член второй степени, предложено было Кардано (1545); Виет его распространил на уравнения любой степени в „De aequationum. . .“. Для квадратного уравнения аналогичное преобразование было известно, по всей вероятности, еще в древности, даже в Вавилоне (см.: М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем

мире. М.—Л., 1941). Кардано, между прочим, иногда применял и преобразование вида $x=\frac{k}{y}$.

[89] (к стр. 374). Т. е. коэффициент второго члена; у Декарта: la quantité connue de ce second membre, у Скаутена: quantitas cognita secundi termini (Geometria, стр. 73). Термин „коэффициент" возник из выражения longitudo coefficiens (содействующая длина), примененного Виетом в упомянутых выше „Notae priores" для наименования величины D, введенной им в сумме $(A+B)^2+D(A+B)$, чтобы сообщить второму слагаемому размерность, требуемую принципом однородности. Ньютон во „Всеобщей арифметике" говорил о „предстоящих числах" (numeri praefixi), Г. Лопиталь — об „умножающей величине" (la quantité qui multiplie). Термин „коэффициент" в нашем понимании употребляли в XVII в. У Оутред (1574—1660), Валлис, автор распространенного руководства „Математический мир" („Mundus mathematicus", 1674), К. Дешаль (1621—1678) и другие.

[90] (к стр. 376). Вопросу о границах корней в латинском издании „Геометрии" посвящена статья Дебона „О пределах уравнений". Дебон ограничился уравнениями до 4-й степени включительно и рассмотрел большое число частных случаев, в зависимости от знаков коэффициентов и отсутствия тех или иных членов. Например, переписывая уравнение $x^2-lx+m^2=0$ в виде $m^2=lx-x^2$, он получает, что положительный корень $x<l$, а так как $x^2=lx-m^2$, то $x>\frac{m^2}{l}$. М. Ролль (1652—1719) установил в 1690—1692 гг., что между двумя соседними корнями уравнения, которые мы бы записали $f^{(n+1)}_{(x)}=0$, может заключаться не более одного корня уравнения $f^{(n)}_{(x)}=0$. Вместе с тем он нашел, что верхней границей действительных корней уравнения $a_0x^n+a_1x^n+\ldots+a_n=0$ является число $\left|\frac{a_m}{a_0}\right|+1$, где a_m — наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент уравнения (эту же границу привел позднее Маклорен в курсе алгебры в 1748 г.). На этой основе Ролль разработал так называемый „метод каскадов" для отделения действительных корней (С. А. Яновская. Мишель Ролль как критик анализа бесконечно-малых. Тр. Инст. истории естествознания, т. I, М., 1947). Ньютон во „Всеобщей арифметике" привел известное правило, также опирающееся на свойства производных; кроме того, он указал на неравенство

$$|x|<\sqrt[2n]{s_{2n}}\,,\quad s_{2n}=\sum x^{2n}$$

и некоторые другие, тесно с ним связанные (русск. пер., стр. 265—

268). Разысканием возможно более тесных границ действительных корней много занимались и в XVIII—XIX вв.

91 (к стр. 377). В переводе Скаутена слово „истинные“ (написанное Декартом, вероятно, по недосмотру) отсутствует.

92 (к стр. 377). Наши иррациональные числа Декарт называет nombres sours, от латинского surdus (глухой, немой), с помощью которого в европейской литературе еще в XIII в. передали арабский термин, в свою очередь бывший переводом греческого $\alpha\lambda o\gamma o\sigma$ (невыразимый, немой, не имеющий отношения). Термин surdus применял и Ньютон во „Всеобщей арифметике“. В средневековой же литературе (начиная с V в.) говорится об „иррациональных“ отношениях.

Открытие несоизмеримых отрезков (прежде всего стороны и диагонали квадрата) сделано было греческими математиками около 500 г. до н. э.; за ним вскоре последовало открытие, по современной терминологии, иррациональности квадратных корней из любых натуральных чисел, не являющихся квадратами целых. Греческие математики не создали понятия об иррациональном числе как таковом. Необходимость оперировать в геометрии с несоизмеримыми отношениями привела их, однако, к созданию общей теории отношений, разработанной Эвдоксом (410?—356?) и изложенной в пятой книге „Начал“ Эвклида. Определение равенства двух отношений в этой теории очень близко к дедекиндову определению сечения в области рациональных чисел. Греки же разработали весьма детальную классификацию некоторых квадратичных и биквадратичных иррациональностей; см. „Начала“ Евклида в пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского (М.—Л., 1948 и 1949). Индусские и многие среднеазиатские средневековые математики, напротив, не строя общей теории, свободно оперировали квадратичными числовыми иррациональностями. Математики Средней Азии (О. Хайям и Насирэддин, 1201—1274) подошли и к пониманию отношения двух несоизмеримых величин как числа.

Европейские математики вплоть до XVII в. не признавали иррациональности за подлинные числа, понимая под числом только то, что измеряется единицей. Арифметика имела дело с целыми числами; непрерывные величины принадлежали геометрии. Лишь постепенно подходили ученые к признанию принципиального равноправия иррациональных чисел с рациональными. Так, Валлис, понимая еще под числом множество единиц, говорил все же, что над „глухими корнями“ можно производить арифметические действия так же, как над числами в собственном смысле слова, и подчеркивал, что приближения к значениям таких корней можно получать с любой степенью точности. Для Валлиса и рациональные дроби не были подлинными числами, хотя и вполне реальными понятиями (ср. прим. 82).

У Декарта иррациональные числа также выступают фактически на равных правах с рациональными. Новое, более широкое определение числа дал Ньютон: „Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное [surdus]. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей“ („Всеобщая арифметика“, стр. 8). В основе этого определения лежала еще античная теория отношений. Это Ньютоново определение приняли Эйлер и некоторые другие ученые XVIII в.

Попытки непосредственно определить понятие об иррациональном числе через понятие о числе рациональном появляются во второй половине XVIII в. Так, А. Г. Кестнер и русский математик П. А. Рахманов (ум. 1813) рассматривали иррациональные числа как пределы рациональных, например десятичных, приближений; на этой же точке зрения стоял О. Коши (1789—1857). Вместе с тем некоторые крупные ученые XVIII в. (д'Аламбер; акад. С. Е. Гурьев, 1764—1813) да и XIX в. продолжали стоять на позициях античной математики.

Строгие теории иррациональных чисел, вызванные к жизни задачами обоснования и развития математического анализа, были созданы во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом (1831—1916), К. Вейерштрассом (1815—1897) и Г. Кантором (1845—1918).

[93] (к стр. 379). Древние математики не встретились с мнимыми величинами; их оберегали от этого „диоризмы“ — ограничения в условиях задач, при которых могли получаться только действительные (и положительные) решения. Некоторые индусские ученые прямо указывали, что отрицательные числа не могут быть квадратами. Открытие мнимых чисел связано было с решением кубических уравнений в радикалах (см. прим. 107): в так называемом неприводимом случае под знаком квадратичного радикала в формуле для корней стоит отрицательное число, между тем как все три корня действительные.

Открытие это сделано было Кардано (1545). Р. Бомбелли (1572) довольно подробно разработал правила действий над мнимостями и на частных примерах показал, что в неприводимом случае в формуле Кардано получается действительная сумма двух содержащих мнимости выражений $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$.

Мнимые величины, которые Кардано именовал софистическими, не получили признания у многих выдающихся математиков, среди них у Виета. Жирар, напротив, настаивал на их использовании, ибо только с их помощью возможно сообщить ряду важных теорем алгебры общий характер. „Могут сказать, — писал он, — для чего служат эти невозмож-

ные [impossibles] решения. Отвечаю: для трех вещей — для верности общего правила, потому что других решений нет и в силу своей полезности“. Декарт, называя эти числа воображаемыми, мнимыми (imaginaires) — этот термин он употреблял еще около 1629 г. (ср. прим. 82), —указывал, что если при построении корней уравнения при помощи двух подходящих кривых последние не пересекаются, то это означает, что все корни — воображаемые. Скаутен говорил: „Истинные и ложные корни какого-либо уравнения всегда действительны или же существуют, т. е. обозначают какую-либо величину или же нехватку величины, и значение их можно выразить арифметически или геометрически; но воображаемые не таковы“ (Geometria, стр. 287). Ньютон во „Всеобщей арифметике“ обосновывал необходимость „невозможных“, по его терминологии (impossibiles), корней тем, что если бы их не было, то задачи, решение которых невозможно и которые приводят к этим уравнениям, оказались бы возможными (русск. перев., стр. 248); эту же мысль высказал ранее Валлис.

Декарт различал положительные и отрицательные мнимости. Так поступал и Ньютон; при этом правилу знаков Декарта можно придать общий характер, приписывая тот или иной знак мнимым корням („Всеобщая арифметика“, стр. 251—252).

Представления математиков XVII и XVIII вв. о природе мнимых величин были весьма неполны. Не было ясно, среди многого другого, исчерпывается ли область мнимых чисел числами вида $a+b\sqrt{-1}$, ибо недостаточно разработаны были операции в комплексной области: например, Лейбницу не ясна была природа $\sqrt{\sqrt{-1}}$. Но уже Валлис высказал мнение, что мнимые корни алгебраических уравнений связаны с извлечением квадратных корней из отрицательных чисел. Ник. Бернулли (1687—1759) в 1743 г. сообщил Эйлеру, что, по его мнению, всякий мнимый корень уравнения имеет вид $a+b\sqrt{-1}$. В 1746 г. А. Клеро показал, что мнимые корни уравнения четвертой степени всегда имеют именно такой вид. На сопряженность мнимых корней уравнения указал Валлис; Эйлер в одном письме 1742 г. и д'Аламбер в 1746 г. высказали то же мнение и показали, что алгебраический многочлен с действительными коэффициентами раскладывается в произведение действительных линейных и квадратичных множителей; это как раз и отрицал Лейбниц, нашедший, что $x^4+a^4=(x^2+a^2\sqrt{-1})(x^2-a^2\sqrt{-1})$, но не заметивший, что $x^4+a^4=(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2)$. Д'Аламбер же показал, что алгебраическое выражение, составленное из чисел вида $a+b\sqrt{-1}$, само имеет вид $A+B\sqrt{-1}$. Вопрос о возведении в мнимую степень и о логарифме любого комплексного числа, отличного от нуля, удовлетворительно разрешил Эйлер в 1740—1749 гг.; впрочем, связь между тригоно-

метрическими и показательной функциями обнаружил еще в 1714 г. Р. Котес (1682—1716) и весьма близко подходил к ней И. Бернулли.

На протяжении XVIII в. математики получили, применяя мнимые величины, немало парадоксов. И хотя польза мнимых чисел была засвидетельствована многими важными открытиями, сделанными при их помощи, ученые были отнюдь не единодушны даже в трактовке некоторых основных операций (так, д'Аламбер не признал эйлеровой теории логарифмов). Мнимости продолжали рассматривать как полезные, но лишенные реального смысла символы. Л. Карно писал: „Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств" („Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых", стр. 255).

Первая попытка геометрической интерпретации чисто мнимых чисел сделана была Валлисом, который еще в одном письме от 1673 г. заметил, что $\sqrt{-n^2}$ можно рассматривать как среднюю пропорциональную между отрезками n и $-n$; подробнее та же мысль была развита им в курсе алгебры 1685 г. Аналогичную идею положил в основу своей весьма еще несовершенной интерпретации Г. Кюн (1690—1769) в одной работе 1750—1751 гг. Современная геометрическая интерпретация была предложена К. Весселем (1745—1818) в 1799 г. и Ж. Арганом (1768—1822) в 1806 г. Арифметическая теория комплексных чисел была разработана затем Гауссом (которому принадлежит указанный только что термин) и Коши. Дальнейшие обобщения понятия о числе в этом направлении даны были У. Гамильтоном (кватернионы) и Г. Грассманом (гипер-комплексные числовые системы). Символ i ввел Эйлер.

[94] (к стр. 380). В этом месте Декарт неявно воспользовался одной из зависимостей между корнями и коэффициентами уравнения. Эти зависимости в общем виде были установлены Виетом в конце сочинения „De aequationum. . .". В случае наличия отрицательных корней Виет комбинировал положительные корни $f(x)=0$ с таковыми же уравнения $f(-x)=0$; о равенстве суммы корней коэффициенту при члене второй степени в кубическом уравнении знал еще Кардано. Ж. Пелетье (1517—1582) указал в 1558 г., что целый корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами и коэффициентом в старшем члене, равным 1, есть делитель свободного члена. Выражения первых четырех степенных сумм корней через коэффициенты дал Жирар, общие рекуррентные соотношения — Ньютон. Далее симметрическими функциями корней занимались Маклорен, Эйлер, Э. Варинг (1734—1798), Ж. Лагранж и другие.

Декартов прием отыскания линейных множителей несколько упростил Я. ван Вессенер (Geometria, стр. 307).

Ньютон во „Всеобщей арифметике“ обобщил решаемую здесь Декартом задачу, занявшись для многочлена с целыми коэффициентами разысканием рациональных делителей первой и второй степени (русск. пер., стр. 44 и сл.).

Поставленная Декартом проблема приводимости, т. е. возможности представления целой рациональной функции $f(x)$ с рациональными коэффициентами в виде произведения двух аналогичных функций $f_1(x), f_2(x)$ после Ньютона становится одной из центральных проблем высшей алгебры. Ею занимались Эйлер, Варинг, Лагранж, Гаусс, петербургский академик Ф. Т. Шуберт (1758—1825), Ф. Эйзенштейн (1823—1852), нашедший в 1850 г. важный критерий неприводимости, Л. Кронекер (1823—1891) и другие.

Далее (стр. 308, 382) Декарт дает точный ответ на вопрос, когда корни кубического уравнения с целыми коэффициентами и старшим из них, равным единице, строятся с помощью циркуля и линейки (т. е. уравнение разрешимо в квадратичных радикалах): это имеет место тогда, когда уравнение приводимо, что может быть лишь при наличии целого корня. Затем Декарт утверждает, что для разрешимости теми же средствами уравнения 4-й степени его кубическая (относительно y^2) резольвента должна разрешаться в квадратичных радикалах (ср. прим. 108).

95 (к стр. 380). Таннери указал, что строкой выше в обоих случаях при 16 нехватает знака минуса (Oeuvres, т. VI, стр. 455).

96 (к стр. 383). Точки между членами уравнения означают, что перед коэффициентом может стоять и плюс и минус. Сами по себе буквенные коэффициенты у Декарта означали еще положительные числа. С тою же целью точками пользовался и Ньютон. Применение буквы с предстоящим знаком + для обозначения как положительного, так и отрицательного числа предложено Гудде (1657 г.; см., например, Geometria, стр. 487).

97 (к стр. 383). Уравнение четвертой степени впервые решил ученик Кардано — Л. Феррари (1522—1565), решение которого опубликовал Кардано в 1545 г. Декарт не указал, как нашел свое решение. Скаутен дал вывод с помощью метода неопределенных коэффициентов. Положив

$$x^4 - px^2 - qx + r = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v),$$

он для отыскания y, z, v получил уравнения

$$z - y^2 + v = -p, \quad -zy + vy = -q, \quad vz = r,$$

$$y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$$

(Geometria, стр. 315). Дебон получил ту же резольвенту несколько иначе (там же, стр. 137—138). Другие приемы были предложены также Эйлером и Лагранжем. Термин резольвента принадлежит Эйлеру.

98 (к стр. 386). Звездочка в этом уравнении в оригинальном издании „Геометрии“ отсутствует. В издании Скаутена она имеется (Geometria, стр. 61).

99 (к стр. 388). Скаутен в этом месте выбросил „или CE“ и поставил „или CE“ после FD на стр. 388, строка 5 (Geometria, стр. 83—84).

100 (к стр. 389). Разбираемая здесь Декартом задача на „вставку“ (т. е. на проведение между двумя данными линиями отрезка данной длины, который сам или продолжение которого проходит через данную точку), восходит, как указывает и Декарт, к древности. К „вставкам“ античные математики нередко сводили задачи, которые не удавалось решить с помощью циркуля и линейки, например трисекцию угла; со вставкой связано было определение конхоиды (см. прим. 36). Вставки удобно производить механически при помощи линейки, на которой нанесен отрезок данной длины. К трисекции угла и решению кубического уравнения вставки применял Виет.

Задачей, разбираемой Декартом, занимались также Жирар, М. Гетальди (1566—1627), Гюйгенс и Ньютон. Жирар (1629) привел задачу к уравнению четвертой степени и разобрал, как связан выбор знаков перед радикалами, входящими в выражения для корней, с отсчетом частей, составляющих отрезок, в том или ином направлении. Скаутен в своих комментариях привел более простое решение, чем Декарт (Geometria, стр. 315—317). Решая ту же задачу во „Всеобщей арифметике“, Ньютон в связи с ней подробно развил соображения о наиболее выгодном выборе неизвестной и советовал выбирать такую величину, для которой нет равноправной в отношении к другим величинам, входящим в задачу. Ньютон сообщает три решения, из которых одно приводит сразу к квадратному уравнению („Всеобщая арифметика“, стр. 155—157; см. также: Цейтен, ч. I, стр. 63—65 и ч. II, стр. 123, 130—132).

101 (к стр. 392). У Декарта здесь имеется описка. Вместо qu'est le point A au regard du point C должно быть: qu'est le point C au regard du point A (указание Таннери в Oeuvres, т. VI, стр. 465).

102 (к стр. 391). Излагаемое здесь построение корней уравнений 3-й и 4-й степеней Декарт нашел не позднее 1629 г. (Oeuvres, т. X, стр. 344—346). Корни уравнения

$$x^4 = px^2 + qx + r$$

строятся здесь с помощью параболы $y = x^2$ и окружности

$$\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 = R^2, \quad R^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r.$$

103 (к стр. 392). Задачи, приводящиеся к кубическим уравнениям, находятся еще в вавилонских текстах, относящихся ко второму тысяче-

летию до н. э.; решение их в то время производилось с помощью проб (решение заранее подбиралось целым). Если не считать задачи об удвоении куба, приводящейся к двучленному уравнению $x^3 = 2a^3$, то первая задача на кубическое уравнение в греческой математике встречается у Архимеда; в ней требовалось разбить шар данного радиуса плоскостью на два сегмента, объемы которых находятся в данном отношении; задача эта приводится к уравнению вида $x^3 + b^2c = ax^2$ и была построена Архимедом с помощью пересечения параболы $x^2 = \frac{b^2}{e} y$ и гиперболы $(a - x) y = e$. Крупный шаг вперед сделали в учении о кубических уравнениях математики Средней Азии, особенно Омар Хайям (около 1040—1123), который дал построения корней трехчленных и четырехчленных уравнений с помощью систематически подобранных конических сечений и на этой основе произвел подробный, хотя и не исчерпывающий анализ всех типов уравнений 3-й степени, имеющих положительные корни. Исследование Хайяма осталось неизвестным европейским математикам XVII в.; в нем есть интересные точки соприкосновения с алгеброй Декарта (см. мою статью „Омар Хайям и его алгебра“, в „Тр. Инст. истории естествознания“, т. II, 1948).

Одновременно с Декартом построил корни уравнений 3-й и 4-й степени с помощью параболы и окружности Ферма (Декарт. Геометрия, стр. 148 и сл.). Ньютон также дал построения кубических уравнений с помощью конических сечений. Соглашаясь с Декартом, что аналитически проще построение с помощью параболы, затем — с помощью гиперболы и на последнем месте — с помощью эллипса, он отмечал, однако, что „если при описании фигур считаться с простотой их вычерчивания, то этот порядок нужно изменить“ (Всеобщая арифметика, стр. 335). Но еще более простым и удобным он считал построение с помощью конхоиды (там же, стр. 301 и сл.) и циссоиды (там же, стр. 323 и сл.). Построениями такого рода много занимались и другие математики: Валлис (применявший кубическую параболу и прямую), Лопиталь, Э. Галлей (1656—1742) и другие (см. также прим. 78 и 105).

104 (к стр. 395). О классических задачах построения двух средних пропорциональных и трисекции угла см.: Цейтен, ч. I, по указателю (см. также прим. 107).

105 (к стр. 397). Правило решения уравнения $x^3 + px = q$ в радикалах открыл, но не обнародовал С. дель Ферро (1465—1526). Около 1535 г. Н. Тарталья (1500—1557) вновь нашел это правило, а также правила для уравнений $x^3 = px + q$ и $x^3 + q = px$. Кардано опубликовал эти приемы в 1545 г.; он же свел общее кубическое уравнение к указанным типам. Виет (опубликовано в 1615 г.) решил уравнение

$$x^3 + 3ax = 2b$$

подстановкой

$$x = \frac{a - y^2}{y},$$

дающей резольвенту

$$y^6 + 2by^3 = a^3.$$

Гудде для решения уравнения

$$x^3 = qx + r$$

полагал

$$x = y + z$$

и получал известным образом

$$3zy = q, \quad z^3 + y^3 = r$$

(Geometria, стр. 501—516).

[106] (к стр. 398). Это выражение дает, как указал Таннери, абсолютную величину корня (Oeuvres, т. VI, стр. 473).

[107] (к стр. 399). В этом и предыдущем параграфе Декарт касается так называемого „неприводимого" случая кубического уравнения

$$x^3 = px + q,$$

когда при $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$ действительные корни выступают в форме суммы двух мнимых чисел (ср. прим. 93). Тригонометрическое решение для этого случая, основанное на сведéнии задачи к трисекции угла и формуле

$$(2\cos\varphi)^3 - 3(2\cos\varphi) = 2\cos 3\varphi,$$

дал Виет (1593); аналогичные решения дали Жирар (1629), а за ним Скаутен (Geometria, стр. 349). А. Клеро представил все три корня в виде бесконечных рядов с действительными членами (1746).

Попытки получить в этом случае выражение корня в радикалах и в действительной форме были безуспешны. В. Молламе в 1890 г. доказал, что такое выражение невозможно (ср. прим. 93).

[108] (к стр. 400). Доказательство того, что решение неприводимых уравнений 3-й степени невыполнимо с помощью циркуля и линейки (т. е. доказательство неразрешимости этими средствами задач о трисекции угла и об удвоении куба в общем случае) дал в 1837 г. П. Л. Ванцель (1814—1848). Соображения, которыми подкрепляет свою догадку Декарт, доказательной силы не имеют. См.: Цейтен, ч. II, стр. 223.

[109] (к стр. 407). Уравнение

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0$$

Декарт решает с помощью пересечения окружности

$$x^2+y^2-2\frac{m}{n^2}y=\frac{t^2}{4n^2v}-\frac{s}{n^2}-\frac{p\sqrt{v}}{n^2},$$

где

$$n=\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}}+q-\frac{1}{4}p^2},\quad m=\frac{r}{2}+\sqrt{v}+\frac{pt}{4\sqrt{v}},$$

и „трезубца“ — кривой, описание которой он привел на стр. 337—339 и уравнение которой

$$nxy-y^3+\frac{1}{2}py^2+\frac{ty}{2\sqrt{v}}-\sqrt{v}=0.$$

В латинском издании „Геометрии“ это построение не комментировано (см.: Цейтен, ч. II, стр. 223—224).

Ньютон посвятил построению корней уравнений высших степеней небольшой раздел „Перечисления кривых третьего порядка“ (1704), где, в частности, предлагает строить корни уравнения 9-й степени с помощью кубической параболы $y=x^3$ и кривой 3-го порядка

$$y^3+bxy^2+cy^2+dx^2y+exy+fx^3+gx^2+hx+k=0.$$

(См.: И. Ньютон. Математические работы, стр. 208).

В 1750 г. Г. Крамер подробно изложил прием построения корней с помощью прямой $y=a$ и параболической кривой

$$y=bx+cx^2+\ldots+px^n.$$

Такими построениями занимались и другие математики XVIII и частью XIX вв.

Непосредственно далее Скаутен дает заголовок: „Нахождение четырех средних пропорциональных“ (Geometria, стр. 104).

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДЕКАРТА

№№ по пор.	Название	Когда написано	Год и место издания
1	Физико-математические изыскания, философские фрагменты [1]	1618—1621	Частично в 1701 г., остальное в 1908 г.
2	Compendium Musicae (Краткий курс музыкального искусства)	1618	Утрехт, 1650
3	Traité de la Méchanique (Трактат о механике)	1618	Париж, 1668
4	Regulae ad Directionem Ingenii (Правила для руководства ума)	1628—1629	Амстердам, 1701 (посмертное издание)
5	Le Monde (Мир)	1630—1633	Лейден, 1662
6	Traité de l'homme, Description du corps humain (Трактат о человеке, описание человеческого тела)		Париж, 1664
7	Discours de la Méthode, Essais. Dioptrique, Météores, Geometrie (Рассуждение о методе и его приложения: Диоптрика, Метеоры, Геометрия)	1633—1636	Лейден, 1637

[1] Отрывки из первых произведений Декарта, ставшие известными из дневников и рукописей Бекмана, Байэ, Лейбница.

№№ по пор.	Название	Когда написано	Год и место издания
8	Meditationes de Prima Philosophia, in qua de Dei existentia et Animae immortalis demonstratur. Objectiones cum Responsionibus Authoris (Размышления о началах философии, в которых доказывается существование бога и бессмертность души. Возражения и ответы автора)	1640—1641	Париж, 1641
9	Epistola ad P. Dinet (Письмо к патеру Динэ)[1]	1642	Амстердам, 1642
10	Epistola ad Celeberrimum Virum Gisbertum Voëtium (Письмо к Воецию)	1643	Амстердам, 1643
11	Principia Philosophiae (Начала философии)	?	Амстердам, 1644
12	Querela Apologetica — Lettre apologetique aux magistrats de la Ville d'Utrech (sic!) (Оправдательное письмо магистратуре города Утрехта)	1644	Амстердам, 1656
13	Notae in Programma (Remarques de R. Descartes sur un Placart...) (Возражения Декарта на пасквиль...)	1647	Амстердам, 1648
14	Passions de l'ame (О страдательных состояниях души)	1649	Париж, Амстердам, 1649
15	Recherches de la Vérité par la lumière naturelle (Искание естественным светом)	1628 или 1641(?)	Амстердам, 1701
16	Oeuvres inédites de Descartes, par Foucher de Careil (Неопубликованные произведения Декарта, изд. Фушэ де Карей)		Париж, 1859—1860

[1] Здесь приведены только те письма Декарта, которые были опубликованы самим Декартом или предназначались им к опубликованию. Все эти письма носят полемический характер.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Геометрия

Приложения

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

*

Редактор Издательства *О. И. Дейнека.* Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректор *Н. П. Ракова*

*

РИСО АН СССР № 4561. Пл. № 12—59Р. М.-24543. Подписано к печати 21/IV 1953 г. Бумага 70×92¹/₁₆. Бум. л. 20.5. Печ. л. 47.97. Уч.-изд. л. 34.8+3 вкл. (0.15 уч.-изд. л.). Тираж 5000. Зак. № 229. Номинал по прейскуранту 1952 г. 26 р. 50 к.

1-я типография Издательства Академии Наук СССР. Ленинград, В. О., 9 линия, 12

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
27	9 сверху	считал	считать
196	2 снизу	его	ее
197	10 „	возможных	иных возможных
321	11 сверху	[precis]	[précis]
335	9 снизу	радиусов	градусов
404	4 „	равны то равны,	равны, то равны
464	1 „	Милько	Мильо
471	13 „	конценция	концепция
484	4 „	Скоутена	Скаутена
565	7 сверху	Снеллиус	Снеллиуса
566	14 „	$n'\left(i' - \frac{i^3}{6} \cdots\right)$	$n'\left(i' - \frac{i'^3}{6} \cdots\right)$
568	2 снизу	элейскими	элейские
586	18 „	екам	векам
621	20 „	требует	требуется
629	4 сверху	непременим	неприменим
633	11 „	Даламбер	д'Аламбер
650	Правая колонка, 16 снизу	Иоста	Иост