и дадут начало дождям и бурям, которые затем обычно прекращаются, ибо берут перевес восточные и северные ветры, прогоняющие облака. Я думаю, что греки называли орнитиями именно эти восточные и северные ветры, так как с ними возвращались птицы, появляющиеся весной; но что касается этезий, которые они наблюдали после летнего солнцестояния, то весьма правдоподобно, что они берут начало от паров, которые солнце поднимает с суши и вод на севере после того, как пребывало долгое время над тропиком Рака; ибо вы знаете, что оно останавливается значительно дольше в тропиках, чем в пространстве между ними; и нужно полагать, что в течение месяцев марта, апреля и мая оно растворяет в пары и ветры бо́льшую часть облаков и снегов, находящихся у нашего полюса, но не может нагреть там землю и воду достаточно сильно, чтоб поднять оттуда новые пары; они дадут начало новым ветрам лишь несколько недель спустя, когда господствующий там шестимесячный день немного перейдет за свою середину.

Однако эти правильные ветры были бы всегда таковы, как я только что описал, если бы земная поверхность была всюду одинаково покрыта водами или всюду одинаково лишена воды, так что не было бы никакого разнообразия морей, суши и гор; ни каких-либо иных причин, вызывающих расширение паров, кроме присутствия солнца, или сгущение их, кроме его отсутствия. Но следует заметить, что когда солнце светит, оно обычно извлекает больше паров из морей, чем с материков, ибо материки, будучи во многих местах сухими, не могут дать ему столько влаги; и, наоборот, когда оно отсутствует, полученное от него тепло извлекает больше паров из материков, чем из морей, ибо это тепло сильнее там задерживается. Вот почему на берегах морей часто наблюдается, что ветер днем дует с моря, а ночью с суши; потому же так называемые *блуждающие* огни ночью ведут путешественников к воде, ибо они пассивно следуют току воздуха, идущего от соседней земли, когда

воздух, находящийся у воды, конденсируется. Нужно также заметить, что воздух, соприкасающийся с поверхностью вод, до известной степени следует их течению; поэтому ветры вдоль берегов морей часто меняют направления вместе с приливами и отливами, а вдоль больших рек можно ощущать в тихую погоду легкие ветры, следующие их течению. Далее, надо еще заметить, что пары, исходящие от воды, более влажны и более плотны, чем исходящие с материков, и что в них всегда имеется значительно больше воздуха и испарений, вследствие чего одни и те же бури обычно более сильны на море, чем на суше[23] и один и тот же ветер может быть сухим в одной стране и влажным — в другой. Так, говорят, что южные ветры, которые почти везде влажны, в Египте являются сухими, ибо воздух для них берется из остальной Африки, где имеются только сухие и выжженные пространства; несомненно, именно поэтому там почти никогда не бывает дождя. Действительно, хотя северные ветры, приходящие с моря, и там влажны, но так как они при этом самые холодные из всех, какие там бывают, они не могут легко вызывать дождь, как вы увидите ниже. Кроме того, необходимо принять во внимание, что свет луны, весьма неодинаковый в зависимости от того, удаляется ли она от солнца или к нему приближается, содействует расширению паров, как и свет других светил; но это происходит лишь в той же степени, в какой этот свет воздействует на наши глаза, поскольку они надежнее всего позволяют нам судить о силе света; таким образом, свет звезд можно почти совсем не принимать в расчет в сравнении со светом луны, а лунный свет — в сравнении со светом солнца[24]. Наконец, нужно учесть, что пары поднимаются далеко не одинаково с разных частей земли; ибо горы нагреваются светилами иначе, чем долины, и леса иначе, чем луга, и возделанные поля иначе, чем пустыни, и даже некоторые почвы сами по себе теплее других или легче других могут быть нагреты; кроме того, в воздухе образуются очень неодинаковые облака, которые могут

переноситься из одной области в другую самыми слабыми ветрами, а также поддерживаться на различных расстояниях от земли, иногда по нескольку вместе, одно над другим. Тогда опять-таки светила иначе действуют на самые высокие из них, чем на самые низкие, иначе, чем на поверхность земли, лежащую под ними, а для одних и тех же мест на земле — иначе, когда над нею нет облаков, чем когда они имеются, и после того, как шел дождь или снег, — иначе, чем до этого. Вследствие этого почти невозможно предвидеть те особые ветры, которые должны дуть в любой день в любой стране на земле, и бывает даже несколько противоположных ветров, которые проходят одни над другими; но вполне возможно определить вообще, какие ветры должны быть наиболее частыми и наиболее сильными, и в каких местах и в какие времена года они должны господствовать, если в точности учесть все, что было здесь указано. Еще лучше можно будет определить это на больших морях, главным образом в местах, очень удаленных от земли, ибо, поскольку поверхность моря не имеет тех различий, какие мы видим на материках, там зарождается гораздо меньше неправильных ветров, а ветры, дующие с берегов, сюда дойти не могут; об этом в достаточной мере свидетельствует опыт наших матросов, которые именно по этой причине дали самому большому из океанов название Тихого. И я не знаю ничего более достойного замечания, чем то, что почти все внезапные изменения в воздухе, например когда он становится более теплым, или менее плотным, или более влажным, чем свойственно данному времени года, зависят от ветров [25], не только от тех, какие дуют в тех самых местах, где происходят эти изменения, но также и от ветров поблизости и от причин, их вызывающих. Положим, например, что мы ощущаем где-нибудь южный ветер, который обусловлен какой-нибудь особой причиной и зародился очень близко отсюда, а потому не приносит много тепла, а в это же время в соседних странах дует северный ветер, возникший далеко

или на достаточной высоте; тогда очень разреженная материя, которую последний несет с собой, легко может дойти до нас и вызвать здесь необычайный холод; этот южный ветер, если исходит только из соседнего озера, может быть очень влажным, тогда как если бы он исходил из пустынных пространств, лежащих далее, был бы гораздо суше; поскольку он возник лишь от расширения паров этого озера, и в его возникновении не участвовала конденсация каких-либо других паров, находящихся к северу, он должен сделать наш воздух гораздо более плотным и тяжелым, чем в том случае, когда он вызван лишь этой конденсацией, без какого-либо расширения паров в направлении к югу. Если мы прибавим к этому, что разреженная материя и пары, находящиеся в порах земли, при перемещении в различных направлениях действуют подобно ветрам, несущим с собою испарения всех родов, смотря по местностям, где они проходят; и, кроме того, что облака, опускаясь, могут вызывать ветер, прогоняющий воздух сверху вниз, как я расскажу позднее, — то, я полагаю, мы получим все причины тех изменений воздуха, которые приходится наблюдать.

Глава V

ОБ ОБЛАКАХ

После того как мы рассмотрели, каким образом пары, расширяясь, вызывают ветры, нам надо посмотреть, каким образом они, сгущаясь и сжимаясь, образуют облака и туманы; именно, когда они становятся значительно менее прозрачными, чем чистый воздух, то, если они доходят до поверхности земли, их называют туманами; если же они взвешены более высоко, их называют облаками[26]. И нужно заметить, что менее прозрачными, чем чистый воздух, они становятся потому, что когда их движение замедляется и их частицы сближаются до соприкосновения, они соединяются и собираются в отдельные маленькие кучки, которые пред-

ставляют собою капли воды или частицы льда. Пока они держатся вполне отдельно и плавают в воздухе, они не могут помешать прохождению света, но когда они собираются вместе, то хотя капли воды или частицы льда и прозрачны, но все же каждая из их поверхностей отражает часть лучей, на нее падающих, как было сказано в „Диоптрике“ обо всех прозрачных телах; а эти поверхности легко могут встречаться в таком большом числе, что заставят отразиться все или почти все лучи. Капли воды образуются тогда, когда разреженная материя, окружающая мелкие частицы паров, уже не имеет силы настолько, чтобы заставить их расшириться и вытеснить одна другую, но еще имеет достаточно силы, чтоб заставить их согнуться, и далее, заставить те частицы, которые сталкиваются, соединиться и слиться в шарик. И поверхность этого шарика становится сразу же совсем ровной и совсем гладкой, ибо соприкасающиеся с нею частицы воздуха движутся по-иному, чем ее собственные, а разреженная материя, содержащаяся в ее порах, также движется по-иному, чем та, которая находится в порах воздуха, как уже было объяснено выше, когда мы говорили о поверхности воды в море; по той же причине она становится в точности шарообразной. Вы нередко видели, что вода в реке вертится и образует водовороты в тех местах, где имеется какое-либо препятствие, мешающее ей перемещаться по прямой линии настолько быстро, насколько требует сила ее движения; точно так же разреженная материя, протекающая через поры других тел, подобно тому, как река течет между водорослями, растущими в ее ложе, свободнее переходит с одного места в другое или в воздухе, или в воде, чем из воздуха в воду или обратно — из воды в воздух. Поэтому, как уже было упомянуто выше, она должна вращаться внутри этой капли, а также вне ее, в окружающем ее воздухе, но иным образом, чем внутри, и в силу этого все частицы ее поверхности должны расположиться вокруг; ибо они не могут не повиноваться ее движениям, поскольку вода — тело жидкое. Этого,

без сомнения, уже достаточно, чтоб понять, что капли воды должны быть вполне шарообразными в том смысле, что их сечения параллельны земной поверхности;[1] ибо нет никакой причины, чтоб какая-либо из частиц их окружности приблизилась к их центрам или удалилась от них больше, чем остальные в этом направлении, так как окружающий воздух не толкает их в большей степени ни с той, ни с другой стороны, по крайней мере если он тих и спокоен, как мы предполагаем. Но, рассматривая их в другом направлении, можно ожидать при столь малой их величине, что их вес не обладает достаточной силой, чтоб они могли разделить воздух и спуститься, разве только если они вследствие этого станут немного более плоскими и менее протяженными в высоту, чем в ширину, как в T или V (рис. 89); поэтому нужно учесть, что воздух имеется у них как по сторонам, так и внизу, и что если их вес недостаточен, чтоб заставить нижнюю из частиц покинуть свое место и дать им опуститься, то он будет недостаточен и для того, чтобы частица, находящаяся сбоку, сдвинулась и дала им расшириться. И наоборот, можно предположить, что если их вес заставляет их опускаться, воздух сделает их несколько более узкими и длинными, как X или Y; нужно опять-таки учесть, что так как они полностью окружены воздухом, то воздух, который они раздвигают и место которого они займут опускаясь, должен в то же время подняться вверх, чтоб заполнить освобожденное ими место. А это возможно только, когда он будет течь вдоль всей их поверхности, где он находит для себя более короткий и более легкий путь, если они круглы, чем если бы они имели какую-либо другую форму; ибо каждый знает, что из всех форм шарообразная — самая емкая, т. е. она имеет наименьшую поверхность по отношению к объему тела, ею вмещаемого. Таким образом, с какой бы точки зрения ни смотреть, эти капли всегда должны оставаться шарообразными, если только этому не воспрепятствует сила

Рис. 89.

[1] *Так в тексте.*

ветра или какая-либо другая особая причина. Что касается их размеров, то они зависят от того, насколько близко лежат друг к другу частицы паров, когда капли начинают образовываться, а также от того, в большей или меньшей мере они затем колеблются, и от количества других паров, которые могут к ним присоединиться. Ибо каждая состоит вначале только из двух-трех мелких частиц паров, которые встречаются друг с другом; но непосредственно за этим, при некоторой плотности пара, две-три капли, образовавшиеся таким путем, при столкновении сливаются в одну, а потом две-три из них в свою очередь опять в одну, и так далее, пока уже не останется возможности сталкиваться. И когда они держатся в воздухе, к ним могут присоединяться еще и другие пары и увеличивать их размеры, пока, наконец, их вес не заставит их упасть в виде дождя или росы[27].

Что касается мелких частиц льда, то они образуются тогда, когда холод настолько силен, что частицы пара не могут быть согнуты разреженной материей, заключенной между ними. И если этот холод наступает лишь тогда, когда капли уже образовались, то, замораживая их, он не изменяет их шарообразной формы, если только не сопровождается достаточно сильным ветром, который может заставить их стать несколько более плоскими с той стороны, с какой он их встречает; если же, наоборот, холод наступает раньше, чем капли начали образовываться, частички пара сливаются лишь вдоль и образуют только ледяные нити очень рыхлого строения; если, наконец, холод наступает в промежутке между этими двумя моментами, что и бывает чаще всего, он замораживает частички пара по мере того, как они сгибаются и собираются по нескольку вместе, не давая им возможности слиться достаточно тесно, чтоб образовать капли; таким путем получаются мелкие ледяные узелки и клубочки совершенно белого цвета, ибо они состоят из нескольких нитей, которые, хотя и прилегают друг к другу, но тем не менее не сливаются вместе и имеют свои самостоятельные поверх-

ности. Эти узелки покрыты как бы пухом или волосками, ибо всегда есть такие частички пара, которые, не успев согнуться и собраться в одно место одновременно с другими, оседают на узелках совершенно прямо и образуют покрывающие их тонкие волоски; смотря по тому, наступает ли мороз более постепенно или более внезапно, и будет ли пар более или менее плотным, эти узелки принимают бо́льшие или меньшие размеры, а окружающие их нити получаются более жесткими и короткими или более рыхлыми и более длинными.

И вы можете видеть отсюда, что требуется всегда две вещи для превращения паров в воду или в лед, а именно — их частицы должны быть достаточно близки, чтоб иметь возможность соприкасаться, и вокруг них должен быть достаточный холод, чтобы, соприкасаясь, они могли соединиться и удержаться около друг друга. Ибо даже очень большого холода было бы недостаточно, если бы они были рассеяны в воздухе так далеко, что никак не могли бы соприкоснуться; точно так же было бы недостаточно, если бы они были совсем близко друг от друга и сильно сжаты, но если бы их теплота, или, иными словами, сила их колебания, была настолько сильна, что препятствовала бы им соединиться. Так, мы видим, что вверху в воздухе не всегда образуются облака, хотя там достаточно холодно для этого; нужно еще, чтобы западный ветер, противоположный обычному направлению движения паров, собрал и сгустил их там, где он заканчивается; или чтобы один или несколько других ветров, дующих с различных сторон, сжали и сгустили их в пространстве между собою; или чтобы один из этих ветров погнал их к уже образовавшемуся облаку; или, наконец, чтобы они сами по себе собрались под каким-либо облаком по мере того, как выходят из земли. Точно так же не всегда образуются и туманы вокруг нас — ни зимой, хотя воздух тогда достаточно холоден, ни летом, хотя пары тогда достаточно обильны; они образуются лишь тогда, когда холод воздуха и обилие паров действуют вместе в одну сто-

рону. Это часто бывает вечером или ночью после достаточно жаркого дня, и чаще весной, чем в другие времена года, даже чем осенью, ибо весной разница между дневным теплом и ночным холодом больше. Они чаще образуются в болотистых и приморских местах, чем на материках, далеких от морей, и на морях, далеких от материков, ибо вода, которая скорее теряет тепло, чем суша, охлаждает воздух, в котором сгущаются пары, в изобилии выделяемые влажной и теплой землей. Но самые большие туманы образуются, как и облака, в тех местах, где заканчивается путь двух или нескольких ветров; ибо ветры гонят к этим местам пары, которые там сгущаются или в туманы, если близкий к земле воздух очень холоден, или в облака, если он недостаточно холоден, так что они могут сгуститься лишь на большей высоте. И заметьте, что капельки воды или частички льда, из которых состоят туманы, могут быть лишь очень малыми; ибо, если бы они были сколько-нибудь крупными, их тяжесть заставила бы их достаточно быстро опуститься на землю, так что мы назвали бы это не туманом, а дождем или снегом. Кроме того, если там, где есть туман, подует какой-либо ветер, он его быстро рассеивает, в особенности, если он состоит из водяных капелек. Ибо при малейшем движении воздуха эти капельки, соединяясь по нескольку вместе, увеличиваются и падают в виде дождя или росы. Заметьте также, что облака возникают на различных расстояниях от земли, смотря по тому, насколько высоко смогут подняться пары, прежде чем сгустятся достаточно, чтобы образовать облака; поэтому часто можно видеть одни облака над другими и даже можно видеть, что их перемещают различные ветры. И это чаще всего бывает в горных странах, ибо теплота, поднимающая пары, действует там более неравномерно, чем в других местах. Нужно, кроме того, заметить, что самые высокие из этих облаков почти никогда не могут состоять из водяных капелек, а состоят только из частиц льда; ибо несомненно, что воздух, в котором они находятся,

более холоден, или, во всяком случае, столь же холоден, как и воздух, находящийся на вершинах высоких гор, который даже среди лета настолько холоден, что препятствует там таянию снега [28]. И чем выше поднимаются пары, тем больше они встречают там холода, который их обращает в лед, и тем меньше могут их там уплотнять ветры. Отсюда следует, что, по крайней мере в обычных случаях, наиболее высокие части облаков состоят только из очень рыхлых ледяных нитей, рассеянных в воздухе на больших расстояниях; затем, немного ниже, образуются узелки, или клубочки, этого льда, очень маленькие и покрытые волосками, а под ними еще другие, немного крупнее; наконец, иногда на самом низком уровне образуются капли воды. И когда воздух, в котором они находятся, вполне тих и спокоен, или если он вполне равномерно увлекается каким-либо ветром, то как эти капельки, так и эти ледяные частицы могут оставаться удаленными на большие расстояния и без всякого определенного порядка, так что в этом случае форма облаков ничем не отличается от формы туманов. Но так как они часто движутся под действием ветров, которые не занимают равномерно всего окружающего их пространства и поэтому не могут перемещать их с той же скоростью, как и этот воздух, то ветры протекают под ними и над ними, сжимая их и вынуждая принять форму, которая меньше всего препятствует их движению; вследствие этого их поверхности, находящиеся на пути ветров, становятся совсем плоскими и гладкими. Важно отметить следующее: все маленькие узелки, или клубочки, снега, лежащие на этих поверхностях, располагаются всегда так, что вокруг каждого из них находится шесть других, которые с ним соприкасаются или которые, во всяком случае, все одинаково от него удалены. Предположим, например, что над участком земли AB (рис. 90) дует ветер с запада D, противоположный обычному направлению движения воздуха или другому ветру, дующему с востока C, и что оба эти ветра вначале остановили друг друга приблизительно в пространстве FGP, где

они сгустили некоторое количество паров и превратили их в беспорядочную массу; в то же время, поскольку их силы в этом месте уравновесились и оказались равными, воздух остался тихим и ясным. Часто бывает, что два ветра дуют противоположно друг другу таким образом; действительно,

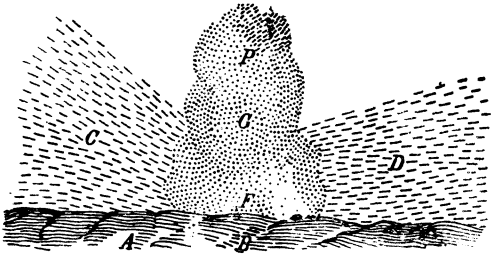


Рис. 90.

вокруг земли всегда дуют несколько различных ветров одновременно, и обычно каждый из них следует своему пути, не отклоняясь от него до того места, где он встретит обратный ветер, оказывающий ему сопротивление; но их силы долгое время не могут уравновеситься, и поскольку в это про-

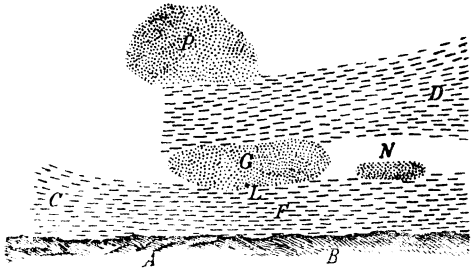


Рис. 91.

странство все более притекает воздух, то если они не прекратятся оба одновременно, что бывает редко, более сильный из них должен, наконец, пойти под облаком или над ним, или даже через него, или кругом, как ему более удобно. Таким образом, либо он совсем заглушает другой ветер, либо, по крайней мере, заставляет его отклониться. Здесь

я предполагаю, что западный ветер, избрав направление между G и P (рис. 91), принудил восточный пройти внизу в F, где он заставил находившийся здесь туман выпасть в виде росы, и поддержал над собою облако G, которое, будучи сжато между двумя ветрами, сделалось совсем плоским и широким, а маленькие клубочки льда, находящиеся на его поверхности как вверху, так и внизу, так же как и на нижней поверхности облака, должны были расположиться так, чтобы каждый из них был окружен шестью другими. Действительно, нельзя представить себе никакой причины, которая воспрепятствовала бы им в этом, и, естественно, все одинаковые шарообразные тела, движимые в одной плоскости более или менее одинаковыми силами, располагаются подобным же способом[29]. Вы можете видеть это на опыте, если бросить в беспорядке на тарелку ряд или два круглых бус, снятых с ниток, и слегка дуть на них таким образом, чтобы они сблизились друг с другом. Но заметьте, что я говорю здесь только о верхних или нижних поверхностях, отнюдь не о боковых, потому что неодинаковое количество материи, которое ветры могут нагнать или, наоборот, унести в каждый момент, обычно делает форму их обвода очень неправильной и неравномерной. Кроме того, маленькие ледяные узелки, образующие внутренность облака G, должны расположиться так же, как и узелки на поверхностях; но это не столь очевидно. Рассмотрим теперь те узелки, которые могут образоваться под облаком уже после того, как оно полностью сформировалось; в то время, пока оно остается взвешенным в пространстве G, из различных мест земли в A выходят пары, которые, понемногу охлаждаясь в воздухе, превращаются в мелкие ледяные узелки, гонимые ветром в L, и эти узелки должны расположиться так, чтобы каждый из них был окружен шестью другими, одинаково его сжимающими и лежащими в той же плоскости. Таким образом, эти узелки образуют сначала нечто вроде листка, располагающегося под облаком, потом еще второй листок, располагающийся

под первым, и так далее, пока хватает вещества. Заметим дальше, что ветер, проходящий между землею и этим облаком, с большей силой действует на самый нижний из этих листков, чем на следующий, лежащий выше, и сильнее на этот последний, чем на выше лежащий, и так далее; поэтому он может уносить их и заставлять их перемещаться отдельно друг от друга, причем сглаживает их поверхности, пригибая с двух сторон маленькие волоски, окружающие клубочки, из которых эти листки состоят. Может даже случиться так, что ветер заставит часть листков выскользнуть из-под облака G и перенестись вверх, как в N (рис. 92), где

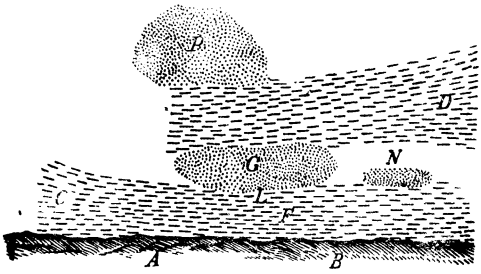


Рис. 92.

они образуют новое облако. Притом я говорил здесь лишь о ледяных частицах, скапливающихся в виде узелков, или клубочков; то же может быть легко распространено на капли воды, если только ветер не настолько силен, чтобы заставить их сталкиваться, или если вокруг них имеются какие-либо разделяющие их летучие тела, или, как часто бывает, какие-либо пары, еще не способные принять форму воды; как только капли соприкоснутся, они соберутся по нескольку в одну и станут тогда столь крупными и столь тяжелыми, что уже будут вынуждены падать в виде дождя.

Однако то, что я сказал выше относительно контуров каждого облака, обычно очень неровных, распространяется лишь на те облака, которые занимают в вышину и в длину меньше места, чем окружающие их ветры; действительно,

в пространстве, где встречаются два или более ветра, бывает иногда такое большое изобилие паров, что они вынуждают эти ветры вращаться вокруг них вместо того, чтобы пройти поверх них или ниже их. Тогда образуется чрезвычайно большое облако, которое, будучи одинаково сжато со всех сторон ветрами, становится совершенно круглым и весьма гладким по окружности; если эти ветры сравнительно теплы или если облако подвергается действию солнечного тепла, то оно даже приобретает как бы корку или пленку из слившихся вместе ледяных частиц; эта пленка может стать очень большой и плотной и все же не падать под влиянием своей тяжести, потому что ее поддерживает вся остальная часть облака.

Глава VI

О СНЕГЕ, О ДОЖДЕ И О ГРАДЕ

Есть несколько причин, препятствующих обычно облакам опуститься сразу после того, как они образовались. Во-первых, частички льда или капельки воды, из которых они состоят, очень малы и потому имеют бо́льшую поверхность сравнительно с количеством материи в них, вследствие чего сопротивление воздуха, разделяемого ими при падении, с большей силой препятствует им падать, чем их вес к этому принуждает [30]. Далее, ветры, которые обыкновенно сильнее у земли, где воздух плотнее, чем вверху, и поэтому действуют в большей степени снизу вверх, чем сверху вниз, часто не только их поддерживают, но даже заставляют их подняться выше той области воздуха, где они находятся. То же самое могут вызвать и пары, которые, поднимаясь из земли или приходя с какой-либо стороны, заставляют разрежаться воздух, находящийся под ними; или одно только тепло этого воздуха, которое, расширяя его, толкает вверх водяные капельки или ледяные частицы; или холод воздуха, находящегося над ними, который, сжимаясь, их притягивает, и тому подобные явления. В частности, ледяные частицы, толкаемые ветром друг к другу, соприкасаются, не соеди-

няясь, однако, полностью, и образуют тело настолько легкое и протяженное, что если только действие тепла, растопляющего некоторые из его частиц, не сделает его более плотным и тяжелым, то оно почти никогда не сможет опуститься до земли. Но, как сказано было выше, вода известным образом расширяется при замерзании под действием холода, и поэтому следует заметить, что тепло, которое обычно расширяет все другие вещества, чаще всего уплотняет вещество облаков. Это легко проверить на снеге, состоящем из того же вещества, что и облака, с той лишь разницей, что он уже более уплотнен; действительно, мы видим, что если его поместить в теплое место, он сжимается и значительно уменьшается в объеме еще раньше, чем из него выйдет вода, или чем он потеряет в весе. При этом оконечности частичек льда, из которых состоит снег, тают, как более рыхлые, скорее, чем остальные части; и растаивая, т. е. сгибаясь и становясь как бы гибкими и подвижными вследствие движения окружающей их разреженной материи, они скользят и присоединяются к соседним частичкам льда, не разъединяясь в то же время с теми частичками, с которыми они связаны; таким образом, они сближают их между собою. Но поскольку эти частички, образующие облака, находятся обычно на бо́льших расстояниях, чем частички снега, лежащего на земле, они не могут просто приблизиться к соседним частицам, не удалившись в то же время от каких-либо других, вследствие чего, хотя первоначально они были равномерно рассеяны в воздухе, они затем разделяются на несколько отдельных кучек, или хлопьев, растущих тем быстрее, чем более сжаты были частицы облака и чем медленнее действует тепло. И даже если ветер или какое-либо расширение всего воздуха, находящегося над облаком, или иная подобная причина, заставят хлопья, расположенные выше, спуститься первыми, они прилипают к хлопьям, расположенным ниже, встречая их на своем пути, и таким образом увеличивают их размеры. После этого теплота, понемногу сгущая их и утяжеляя, легко мо-

жет заставить их опуститься до самой земли, и когда они таким образом опускаются, не вполне растаявшие, они образуют снежинки; но если воздух, через который они проходят, настолько тепел, что они в нем тают, как это всегда имеет место летом, а в нашем климате часто и в другие времена года, то они превращаются в капли дождя. Иногда случается, что после того как они таким путем растаяли или почти растаяли, подует холодный ветер; тогда, замораживая их вновь, он превращает их в град.

Град этот может быть разных родов. Во-первых, если холодный ветер, который был его причиной, встречает уже готовые капли воды, он превращает их в ледяные зерна, совершенно прозрачные и круглые, лишь немного сплющивая их с той стороны, с которой он их толкает. Если же он встречает хлопья снега, почти растаявшие, но такие, которые еще не округлились в водяные капли, тогда получается тот угловатый град и те неправильные формы, которые встречаются иногда в очень крупных градинках по той причине, что они образованы холодным ветром, который, перемещая облако сверху вниз, толкает многие из этих хлопьев друг к другу и заставляет их смерзаться в одно целое. Здесь нужно еще заметить, что когда этот ветер приближается к хлопьям, которые уже тают, он является причиной того, что тепло окружающего их воздуха, иными словами разреженная материя, наименее подвижная и легкая, какая имеется в этом воздухе, уходит в их поры, ибо воздух не может сразу в них проникнуть. Точно так же иногда на земле, во время дождя или ветра, охлаждающего наружный воздух, в дома входит больше тепла, чем до этого. И теплота, находящаяся в порах этих хлопьев, держится больше у их поверхности, чем внутри, потому что разреженная материя, служащая ее причиной, легче может продолжать там свои движения; и там она растопляет их все больше и больше, до тех пор, пока они начинают вновь замерзать. Даже самые жидкие из частиц, т. е. наиболее подвижные из них, находящиеся в других местах, также стремятся сюда, тогда как те, кото-

рые не могут растаять, остаются в центре; вследствие этого каждая из этих градин обычно состоит снаружи из сплошного прозрачного льда, а в средине имеется немного снега, как вы можете убедиться, если ее разломаете. А так как град выпадает почти всегда только летом, это должно убедить вас в том, что и летом облака могут состоять из ледяных частиц, так же как и зимой. Причина, почему зимой не может выпадать такой град, во всяком случае град с более или менее крупными зернами, лежит в том, что зимой до облаков не доходит достаточно тепла, чтобы произвести должное действие, разве только если они находятся так низко, что их вещество, совсем или почти совсем растаяв, не успеет замерзнуть вновь, прежде чем опустится до земли. Если снег еще не растаял в такой мере, а лишь немного нагрет и размягчен, то, когда появляется ветер, обращающий его в град, это вещество делается отнюдь не прозрачным, а остается белым, как сахар. И если хлопья этого снега достаточно малы, а именно размеров горошины или меньше, то каждая превращается в более или менее круглую градинку; но если их размеры больше, хлопья тают и разделяются на мелкие острые зерна в виде пирамид; ибо тепло, которое уходит в поры этих хлопьев в момент, когда их начинает окружать холодный ветер, уплотняет и сжимает все их части, направляясь от их окружностей к центрам, вследствие чего они становятся почти круглыми; а холод, проникая в них непосредственно вслед за этим и замораживая их, делает их значительно более твердыми, чем снег. Если они сравнительно крупны, теплота, находящаяся внутри них, продолжает еще сжимать и сгущать их внутренние части, причем они все время стремятся к центру, а внешние части уже настолько отвердели и замерзли вследствие холода, что не могут следовать за ними; поэтому необходимо, чтобы они расщеплялись внутри, по плоскостям или прямым линиям, направленным к центру, и чтобы трещины в них увеличивались по мере того, как мороз проникает все дальше; и, наконец, они

трескаются и разделяются на острые кусочки, которые также представляют собою градины. Я не определяю, на сколько таких градин могут разделяться эти частицы, но мне кажется, что обыкновенно их должно быть не менее восьми, хотя возможно, что они могут разделяться и на двенадцать, и на двадцать, и на двадцать четыре, а скорее даже на тридцать две или даже гораздо больше, если они более крупны и состоят из более тонких снежинок и если холод, превращающий их в град, более резок и наступает более внезапно [31]. Я неоднократно наблюдал град, зерна которого имели приблизительно форму сегментов шарика, разделенного на восемь равных частей тремя сечениями, пересекающимися в центре под прямыми углами. Приходилось мне наблюдать и другие, которые, будучи более длинными и более мелкими, составляли на вид около четвертой части описанных выше, и хотя их ребра, сжимаясь, притупились и округлились, они все же имели форму, близкую к форме сахарной головы. И я наблюдал также, что до или после выпадения этих последних, или даже вместе с ними, обыкновенно выпадали и другие, имевшие круглую форму.

Но различные виды этих градин не представляют ничего любопытного или примечательного в сравнении со снежинками, образующимися, как я описал ранее, из маленьких узелков, или клубочков, льда, которые ветер располагает в форме листиков; когда теплота начинает растоплять мелкие волоски этих листиков, она вначале пригибает нижние и верхние, как более подверженные ее действию, и заставляет небольшое количество воды, выделяющееся из них, распределиться по их поверхностям; здесь она тотчас же заполняет маленькие неровности, которые на них имеются, и делает их столь же ровными и гладкими, как и поверхности жидких тел. Хотя эта вода тотчас же замерзает снова, потому что тепла тут как раз достаточно, чтобы растаяли мелкие, окруженные воздухом волоски, но его не хватает на что-либо другое, и его недостаточно, чтобы не дать замерзнуть

вновь их материи, когда она находится на этих ледяных поверхностях. Далее, это тепло, размягчая и сгибая также и мелкие волоски, сохранившиеся вокруг каждого узелка в той области, где он соприкасается с другими, ему подобными, является причиной того, что те из волосков, которые наиболее удалены от шести соседних узлов, сгибаясь в любую сторону, соединяются с теми, которые находятся напротив этих шести узлов. Действительно, охлаждаясь благодаря близости этих узлов, они не могут растаять, а напротив, заставляют снова замерзнуть вещество остальных, как только

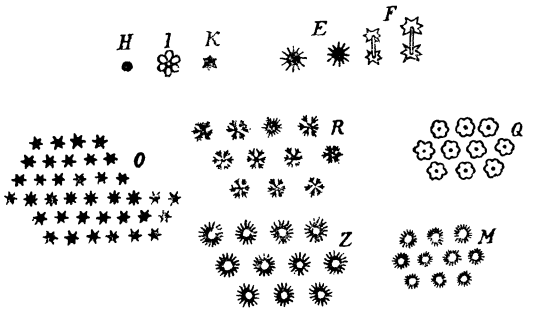


Рис. 93.

оно смешивается с их веществом. Вследствие этого вокруг каждого узелка образуется шесть концов, или лучей, которые могут иметь различные формы, смотря по тому, будут ли узелки более или менее крупными и сжатыми, а их волоски — более или менее жесткими и длинными, и будет ли тепло, сливающее их, более или менее умеренным, и будет ли ветер, сопровождающий это тепло (если оно вообще сопровождается ветром), слабее или сильнее. Таким образом, внешняя поверхность облака, которая вначале была такова, как это можно видеть в *Z* или в *M* (рис. 93), в дальнейшем становится такой, как это можно видеть в *O* или в *Q*, и каждая из ледяных частиц, из которых она состоит, имеет вид маленькой розочки или звезды очень совершенной формы [32].

Чтобы вы не думали, что я говорю голословно, я приведу

наблюдение, сделанное мною зимой прошедшего 1635 года. Четвертого февраля, после того как воздух был сначала исключительно холоден, вечером в Амстердаме, где я тогда находился, выпало немного гололеда, т. е. дождя, который замерзал, падая на землю, а затем пошел очень мелкий град. Относительно него я предположил, что его зерна, которые примерно имели размеры, изображенные в *H*, представляли собою капли того же дождя, замерзшие наверху в воздухе. Во всяком случае, они были не в точности круглыми, какими, без сомнения, были ранее дождевые капли, а одна их сторона была заметно более плоской, чем другая, так что они подходили по виду к той части нашего глаза, которая носит название хрусталика. Отсюда я заключил, что ветер, который был в то время очень силен и холоден, имел достаточно силы, чтобы изменить таким образом форму капель, замораживая их. Но что более всего меня удивило, это то, что среди градин, которые падали последними, я заметил несколько таких, вокруг которых было шесть маленьких зубчиков, напоминавших часовые колеса, как вы можете видеть в *I*, и поскольку эти зубчики были совершенно белые, как сахар, тогда как зерна, состоявшие из прозрачного льда, казались почти черными, они, очевидно, состояли из очень тонкого снега, который прилип к ним, когда они образовались, подобно тому как изморозь прилипает к растениям. Я убедился в этом еще лучше, когда в самом конце я встретил одну или две градины, окруженные бесчисленными мелкими волосками, состоявшими из более бледного и тонкого снега, чем тот снег, из которого состояли мелкие зубчики вокруг других градин. Разницу между ними можно было бы сравнить с разницей между нетронутой золой, которой покрываются потухшие угли, и золой, которая прогорела и скопилась в очаге. Мне было только трудно представить себе, что могло создать и так строго соразмерить эти шесть зубчиков вокруг каждой градинки в свободном воздухе и при движе-

нии такого сильного ветра; однако, наконец, я понял, что этот ветер легко мог унести несколько из этих градин под какое-либо облако или поверх него, и дальше поддержать их там по причине их малой величины; а там они должны были расположиться так, чтоб каждая из них была окружена шестью другими, лежащими в той же плоскости, согласно обычной закономерности природы. Кроме того, можно было считать весьма правдоподобным, что теплота, которая должна была находиться незадолго до этого высоко в воздухе, чтобы вызвать дождь, наблюдаемый мною, выделила там некоторое количество паров, и тот же ветер погнал их на градины, где они и замерзли в виде очень рыхлых мелких волосков, а может быть даже помогли поддерживать эти градины. Последние легко могли бы так и оставаться взвешенными, пока вновь не появилась бы некоторая теплота, которая сначала растопила бы все волоски, окружающие каждую из градин, исключая те, которые располагались напротив средины какой-либо из шести соседних градин, ибо там их холод помешал бы ее действию. Тогда вещество этих растаявших волосков тотчас же проникло бы в промежутки между шестью скоплениями тех, которые не растаяли; оно их укрепило бы и сделало бы менее проницаемыми для теплоты и замерзло бы между ними, образуя таким путем шесть зубчиков, о которых мы говорим. В то же время бесчисленные волоски, которые я наблюдал вокруг некоторых из последних упавших градин, остались совершенно незатронутыми этим теплом. На другое утро, около восьми часов, я наблюдал еще другой род града, вернее снега, о котором я никогда прежде не слышал: это были мелкие ледяные пластинки, совершенно плоские, очень гладкие, очень прозрачные, толщиной примерно с лист довольно толстой бумаги, а величиной, как указано в *K*, но они имели столь совершенную шестиугольную форму, их шесть сторон были столь прямы, а шесть углов столь точно равны, что ничего подобного по точности не может сделать чело-

век. Я сразу усмотрел, что эти пластинки должны были первоначально представлять собою маленькие сгустки льда, расположенные, как я сказал выше, и сжатые очень сильным ветром, сопровождаемым достаточным теплом; это тепло растопило все их волоски и в такой мере наполнило все их поры полученной отсюда влагой, что из белых, какими они были вначале, они стали прозрачными. Этот ветер в то же время так сильно прижимал их друг к другу, что между каждыми двумя из них не осталось никакого промежутка, а проходя под ними и над ними, он и сделал их поверхности плоскими и таким образом придал им форму именно таких пластинок. Однако осталась еще некоторая трудность, заключавшаяся в том, что, хотя эти клубочки льда наполовину растаяли и были при этом прижаты друг к другу, они не слиплись между собою, а остались разделенными, ибо, хотя я обратил на это особое внимание, я ни разу не мог встретить двух градин, которые были бы соединены вместе. Но я скоро нашел этому удовлетворительное объяснение, рассмотрев, каким образом ветер всегда колышет и заставляет последовательно изгибаться все частицы водной поверхности, протекая над нею, и в то же время не делает ее жесткой или неоднородной; отсюда я понял, что он непременно должен изгибать и волновать совершенно так же поверхности облаков, и приводя все время в движение каждую из ледяных частиц несколько иначе, чем соседние, он не дает им вполне склеиться друг с другом. Однако он при этом не приводит их в беспорядок, хотя продолжает уравнивать и сглаживать их маленькие поверхности; нам приходится иногда видеть, как ветер сглаживает таким же образом поверхность волн, которые он поднимает в дорожной пыли.

После этого облака появилось другое, которое выделило лишь мелкие розочки или колесики с шестью зубцами, закругленными в форме полукругов, как это можно видеть в Q (рис. 94); они все были прозрачны и совершенно плоски, примерно той же толщины, как и пластинки, им предшествовавшие,

и были так совершенно сформированы и соразмерены, что это даже трудно себе представить. В середине некоторых из них я заметил даже крошечную белую точку, точно это был след ножки циркуля, которым пользовались, чтоб вычертить их окружность. Однако мне было легко представить себе, что они образовались таким же путем, как и пластинки, но только ветер менее сжимал их, и тепло могло быть не столь сильным. Потому их кончики не совсем растаяли, а лишь немного укоротились и закруглились в форме зубчиков; что же касается белой точки, которая имелась в средине некоторых

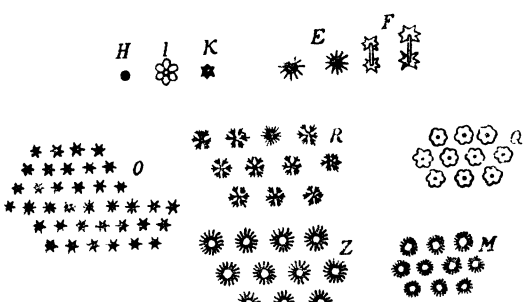


Рис. 94.

из них, то я не сомневался, что она произошла оттого, что теплота, сделавшая их из белых прозрачными, была недостаточно сильна, чтобы проникнуть к их центру. После этого выпало еще несколько таких же колесиков, попарно соединенных осью, или, поскольку начала этих осей были очень толстыми, скорее можно сказать, что это были маленькие хрустальные столбики, каждый конец которых был украшен розой из шести лепестков, несколько более широких, чем основание столбиков [33]. Затем стали выпадать и более рыхлые градины, и нередко розы или звезды, находившиеся на их концах, были неодинаковы. Затем стали выпадать более короткие, и чем дальше, тем все короче, пока, наконец, эти звезды не слились совсем; выпали также двойные с двенадцатью концами или лучами, довольно длинными

и прекрасно соразмеренными, причем у одних они все были равны, а у других попеременно равны и не равны, как можно видеть в *F* и *E*. Все это дало мне повод предположить, что частицы льда, принадлежащие двум различным плоскостям, или листкам, наслаивающимся в облаках, легче могут соединяться между собой, чем те, которые принадлежат одному и тому же листку; действительно, хотя ветер обычно действует сильнее на более низкие из этих листков, чем на более высокие, и потому первые движутся немного быстрее, однако он может действовать иногда на те и другие с одинаковой силой и колеблет их одинаковым образом, в особенности тогда, когда имеется всего два или три один над другим. Тогда, пробираясь между клубочками, их образующими, он заставляет те из них, которые соответствуют друг другу в разных листках, держаться как бы неподвижно относительно друг друга, несмотря на движение и колебание листков, потому что таким путем ему легче пройти. В то же время теплота, которой близость клубочков из двух различных листков в той же мере мешает растопить те из их волосков, которые находятся друг против друга, как и близость клубочков из одного и того же листка, растапливает лишь другие волоски поблизости. Они, тут же проникая между теми, что остались, и замерзая там вновь, образуют оси или столбики, соединяющие эти клубочки; при этом они превращаются в розы или звездочки. Меня нисколько не удивляли утолщения, которые я наблюдал в основаниях этих столбиков, ибо я хорошо знал, что одной материи мелких волосков, окружавших два клубочка, было бы недостаточно для их образования; я представил себе, что друг над другом находилось, может быть, четыре или пять листков, и теплота, действуя более сильно на два или три средние из них, чем на первый и последний, поскольку они были более защищены от ветра, почти полностью растопила составляющие их клубочки и превратила их в столбики. Я не удивился также и тому, что часто наблюдал две звездочки неодина-

ковых размеров, соединенные вместе, ибо, учитывая, что лучи более крупной из них были всегда длиннее и острее, чем у второй, я заключил, что причиною этого была большая теплота вокруг более маленькой, чем вокруг второй, и она поэтому в большей степени растопила и притупила кончики ее лучей; а может быть, эта наименьшая получилась из более маленького ледяного клубочка. Не удивили меня и выпавшие позднее двойные звездочки с двенадцатью лучами, ибо я заключил, что каждая из них образована двумя простыми из шести лучей, слитыми в одну действием тепла, которое, действуя сильнее между двумя листками, в которых они находились, чем снаружи, полностью растопило мелкие ледяные нити, их соединявшие, и таким образом спаяло их вместе; подобно этому оно укоротило и те из них, которые соединяли между собою другие, выпавшие, как я видел, непосредственно до этого.

Замечу, что среди тысяч мелких звездочек, которые я наблюдал в этот день, я, хотя и обратил на это особое внимание, не мог обнаружить ни одной, у которой было бы больше или меньше шести лучей, исключая очень небольшое число двойных звездочек, у которых их было двенадцать и четыре или пять других, у которых их было восемь; эти последние были не в точности круглые, как все остальные, а немного продолговатые, и в общем такие, как показано в *O* (рис. 94). Из этого я заключил, что они образовались в месте соединения оконечностей двух листков, которые ветер столкнул друг с другом в то время, как теплота превращала их маленькие клубочки в звездочки: у них был именно такой вид, какой должен получиться в этом случае. Поскольку это соединение происходит по совершенно прямой линии, оно не может быть в такой же мере нарушено волнением, производимым ветрами, как соединение частиц одного и того же листка. Кроме того, и тепло может действовать сильнее между краями этих листков, когда они приближаются друг к другу, чем в других местах, и поскольку оно уже успе-

вает наполовину растопить находившиеся там ледяные частицы, холод, сменяющий тепло в момент, когда частицы начинают соприкасаться, легко может склеить их вместе. Далее, кроме прозрачных звездочек, о которых я говорил до сих пор, в этот день выпадало множество других, белых, как сахар, причем у некоторых из них была та же форма, что и у прозрачных; но у большей части лучи были более острые и рыхлые и разделялись часто на три разветвления, из которых два боковых сгибались по обе стороны наружу, а среднее оставалось прямым, так что они как бы изображали цветок лилии, как это видно в *R*; иногда они делились на несколько разветвлений, напоминающих перья или листья папоротника и тому подобные вещи. И среди этих звездочек падали также и другие ледяные частицы в виде нитей или без всякой определенной формы. Причины этого нетрудно понять, ибо, что касается белизны этих звездочек, то она зависит лишь от недостаточного проникновения теплоты в глубину их вещества, как ясно следует из того, что все очень тонкие звездочки были прозрачными. Если иногда лучи у белых звездочек были не менее короткими и притупленными, чем у прозрачных, то это не потому, что их настолько растопило тепло, а потому, что их больше сжал ветер; обычно же они были более длинными и острыми, так как меньше растаяли; а если эти лучи разделялись на несколько ветвей, то это потому, что тепло покинуло составлявшие их мелкие волоски, как только они начали приближаться друг к другу, чтобы соединиться; если они разделились только на три ветви, то потому, что тепло покинуло их немного позднее; боковые ветви сложились по обе стороны наружу, когда это тепло уходило, ибо близость средней ветви сделала их сразу же более холодными и менее гибкими со стороны этой ветви, что и придало каждому лучу форму цветка лилии. А частички льда, не имевшие никакой определенной формы, убедили меня в том, что не все облака состоят из мелких узелков, или клубочков, но есть и такие, которые состоят только из

беспорядочно перемешанных нитей. Что касается причины, которая заставляла эти звездочки падать, то она стала мне вполне ясной, если принять во внимание большую силу ветра, дувшего в течение всего этого дня, ибо я понял, что он мог легко разбросать их и порвать листки, построенные из них, после того как он их образовал; когда они таким образом пришли в беспорядок, они уже легко могли рассечь воздух, так как были совсем плоские и достаточно тяжелые, чтобы опуститься вниз. Но если некоторые из таких звездочек выпадают и в тихую погоду, то это потому, что нижний воздух, сжимаясь, притягивает к себе все облако, или верхний, расширяясь, толкает его вниз и также приводит их в беспорядок; из этого следует, что они должны обычно сопровождаться более обильным снегом, чего в этот день не случилось. На следующий день выпали снежные хлопья, которые казались состоявшими из бесчисленного множества мельчайших звездочек, слипшихся вместе: однако, разглядев их ближе, я нашел, что находившиеся внутри были построены не так правильно, как находившиеся снаружи, и что они легко могли произойти от распадения облака, подобного тому, которое выше было обозначено через G (рис. 92). Затем, когда этот снег перестал вследствие внезапного ветра грозового характера, выпало немного белого града [31], очень продолговатого и мелкого, каждое зерно которого имело форму сахарной головы; и поскольку тотчас вслед за этим воздух стал совсем ясным и чистым, я заключил, что этот град образовался из наиболее высокой части облаков, где снег был очень тонок и состоял из весьма рыхлых нитей, как я описывал выше. Наконец, после того как через три дня я увидел выпадение снега, полностью состоявшего из мелких узелков или клубочков, окруженных большим числом перепутанных волосков и не имевших совершенно звездчатой формы, я убедился в правильности всего, что представлял себе по этому вопросу.

Что касается облаков, состоящих лишь из водяных капель, то здесь легко понять сказанное мною о том, как они

опускаются в виде дождя, а именно: либо благодаря собственной тяжести, когда капли становятся достаточно крупными; либо потому, что воздух, находившийся под ними, уходит прочь или находившийся над ними их сжимает, и поэтому они получают возможность опуститься; либо потому, что все эти причины действуют совместно. При этом, когда удаляется воздух, находившийся внизу, образуется самый мелкий дождь, какой только возможен, так что иногда он даже так мелок, что его называют уже не дождем, а опускающимся туманом; наоборот, дождь бывает очень крупный, когда облако опускается лишь вследствие того, что на него давит воздух сверху, ибо самые верхние из его капель опускаются первыми и встречаются с другими, которые увеличивают их объем[35]; более того, мне случалось наблюдать летом, во время тихой погоды, сопровождавшейся гнетущей и удушливой жарой, что подобный же дождь начинал итти еще раньше, чем появились какие-либо облака; причина этого в том, что в воздухе имелось много паров, находившихся, без сомнения, под давлением ветров из других мест, как о том свидетельствовали затишье и тяжесть воздуха; поэтому капли, в которые превращались эти пары, становились, падая, очень крупными и падали по мере того, как они образовывались.

Что касается туманов, то, когда земля охлаждается и находящийся в ее порах воздух сжимается, они получают возможность опуститься и превращаются в росу, если состоят из водяных капель, и в изморозь или иней, если состоят из уже замерзших паров или, вернее, замерзающих по мере того, как они достигают земли. И это происходит главным образом ночью или утром, ибо это как раз то время, когда земля, удаляясь от солнца, охлаждается. Но ветер также очень часто прибивает туманы к земле, достигая тех мест, где они находятся; он может даже переносить их вещество и образовать из него росу или иней в тех местах, где они вовсе не наблюдались; и в этих случаях иней

появляется на растениях лишь с той стороны, где их касается ветер [36].

Что касается росы, выпадающей только вечером, то ее влияние проявляется лишь насморками и головными болями, которые она причиняет в некоторых странах [37]. Она состоит из особых летучих веществ, тонких и резких, которые, будучи более неподвижными, чем пары, поднимаются лишь в теплых странах и в ясные дни опускаются вновь, как только их покидает солнечная теплота; поэтому в разных странах она обладает различными свойствами, смотря по качеству почвы, откуда исходят эти испарения, а в некоторых местах эта роса и вовсе неизвестна. Я не хочу сказать, что она не сопровождается обыкновенной росой, начинающей падать уже с вечера, но я утверждаю, что эта последняя никоим образом не является причиной болезней, в которых ее обвиняют. Подобные же летучие вещества образуют манну и разные соки, опускающиеся из воздуха в течение ночи, ибо пары могли бы превратиться лишь в воду или в лед, а эти соки не только различны в различных странах, но есть и такие, которые оседают только на некоторых определенных телах, очевидно потому, что их частицы имеют такую форму, которая не позволяет им сцепиться с другими частицами и на них задержаться [38].

Если роса не выпадает вовсе, и утром туманы поднимаются вверх, и земля остается совсем сухой, — это признак будущего дождя, ибо это случается лишь тогда, когда земля, не успев достаточно охладиться ночью или необычно нагревшись утром, выделяет большое количество паров, которые, отталкивая эти туманы к небу, заставляют их капли встречаться и увеличиваться в размерах, а вскоре затем они выпадают в виде дождя [39]. Признаком дождя является и то, что воздух содержит очень много облаков, но с утра, тем не менее, солнце светит с ясного неба, ибо это означает, что на востоке нет других облаков в воздухе, соседнем с нашим, которые препятствовали бы солнечному

теплу сгущать пары, находящиеся над ними, и даже поднимать из земли новые пары, присоединяющиеся к ним. Но эта причина имеет силу только для утра, и если дождь не пойдет до полудня, она не даст возможности судить о том, что будет к вечеру [40]. Я не буду говорить о многих других признаках дождя, ибо они по большей части очень ненадежны. Вам надо учесть, что та же теплота, которая обычно требуется, чтоб сгустить облака и выделить из них дождь, может иногда, наоборот, расширить их и превратить в пары, которые в одних случаях незаметно теряются в пространстве, а в других — вызывают ветры, смотря по тому, будут ли части этих облаков более стеснены или раздвинуты; кроме того, эта теплота в большей или меньшей степени сопровождается влажностью и воздух поблизости расширяется в большей или меньшей степени или сгущается; вы поймете тогда, что все эти вещи слишком изменчивы и недостоверны, чтобы люди могли их предвидеть.

Глава VII

О БУРЯХ; О МОЛНИИ И О ДРУГИХ ОГНЯХ, ЗАЖИГАЮЩИХСЯ В ВОЗДУХЕ [41]

Облака вызывают ветры не только тогда, когда они расходятся в виде паров; иногда они опускаются столь внезапно, что прогоняют с большой силой весь воздух, находящийся над ними, и вызывают тогда очень сильный, но мало продолжительный ветер. Его подобие мы можем наблюдать, если растянем в воздухе на некоторой высоте занавес и затем совершенно ровно опустим его на землю. Сильным дождям почти всегда предшествует такой ветер, который явственно действует сверху вниз, и то, что он холоден, доказывает его происхождение из облаков, где воздух обычно холоднее, чем вокруг нас; именно этот ветер является причиной того, что когда ласточки летают очень низко, они

предвещают нам дождь, ибо он прибивает вниз различных мошек, которыми они питаются и которые в хорошую погоду имеют обыкновение залетать высоко и резвиться в воздухе. Иногда также, если даже облако очень мало и лишь немного опускается, и ветер настолько слаб, что почти незаметен на вольном воздухе, он все же завывает у нас в трубах, поднимает золу и сор в камине и вызывает в них маленькие вихри, которые кажутся удивительными тому, кому непонятна причина их, и за которыми обычно следует дождь. Но если облако, которое опускается вниз, очень тяжело и занимает значительное пространство, — а это бывает чаще на морях, чем в других местах, ибо пары там распределены более равномерно, так что если там где-либо образуется малейшее облако, оно тотчас же распространяется на все соседние места, — то следствием этого непременно бывает буря, которая тем сильнее, чем больше и плотнее облако, и длится тем дольше, чем с большей высоты оно спускается. Я представляю себе, что именно таким путем возникают ураганы, которых так страшатся моряки во время своих длительных плаваний, в особенности по ту сторону мыса Доброй Надежды, где пары, поднимающиеся из Эфиопского моря, очень обширного и сильно нагреваемого солнцем, легко могут вызвать нисходящий ветер, останавливая естественный ход ветров, идущих из Индийского океана. Этот ветер собирает пары в одно облако, и оно, будучи первоначально вызвано неоднородностью между двумя большими океанами и сушей, должно вырасти гораздо больше, чем облака, образующиеся в наших местностях, где они вызываются значительно меньшими неоднородностями между нашими долинами, озерами и горами. Так как в тех местах почти никогда не бывает других облаков, то моряки, как только образуется облако — даже столь малое, что фламандцы сравнивают его с бычьим глазом и так его и называют, — все же спешат спустить паруса и подготовиться к встрече бури, которая сразу и налетает, даже когда остальной воздух кажется очень спокой-

ным и ясным. Мне даже думается, что буря должна быть тем сильнее, чем меньше казалось облако вначале, ибо, поскольку оно не может стать достаточно плотным, чтобы затемнить воздух и быть видимым, не обладая в то же время значительными размерами, значит, оно кажется малым лишь вследствие его чрезвычайно большого расстояния, а чем с большей высоты опускается плотное тело, тем более стремительно его падение. Таким образом, это облако, находясь весьма высоко и становясь внезапно очень большим и плотным, опускается все целиком, с большой силой прогоняя находящийся под ним воздух, и вызывает таким образом ветер, свойственный буре. Нужно еще заметить, что пары, примешанные к воздуху, расширяются при его движении, и, кроме того, из моря в это время также выходят пары, вызванные его волнением, что значительно увеличивает силу ветра и, замедляя опускание облака, заставляет грозу продолжаться более длительное время. Кроме того, к этим парам бывают обычно примешаны и летучие тела, которые — поскольку облако не может прогнать их так далеко, как прогоняет пары, по причине меньшей твердости и более неправильной формы их частиц — отделяются от паров волнением воздуха, подобно тому как при сбивании сливок масло отделяется от сыворотки, что было уже указано нами выше. Благодаря этому они собираются тут и там в отдельные кучки, парящие высоко близ облака, и в конце концов оседают на канатах и на мачтах кораблей, когда облако опускается вниз; и там, захваченные сильным движением, они образуют огни, называемые огнями Св. Эльма, которые ободряют моряков и дают им надежду на хорошую погоду. Правда, что иногда эти бури бывают всего сильнее в конце; иногда наблюдается несколько облаков одно за другим, причем под каждым из них находятся такие огни. Может быть поэтому древние, когда видели один огонь, называли его звездой Елены и считали дурным предзнаменованием, ожидая усиления бури; когда они видели два, они называли их Кастором и Поллук-

сом и считали хорошим признаком, поскольку чаще всего им не приходилось видеть больше двух, за исключением тех случаев, когда гроза была особенно сильна; тогда они видели три огня, и это считалось также дурным предзнаменованием. Однако я слышал от наших моряков, что они иногда видели до четырех и пяти таких огней, может быть потому, что их корабли больше и имеют больше мачт, чем корабли древних, а может быть потому, что они путешествуют в странах, где весьма обильны эти испарения; я, впрочем, могу говорить о том, что делается в этих морях, лишь предположительно, ибо никогда их не видел и имею о них лишь весьма неполные сведения.

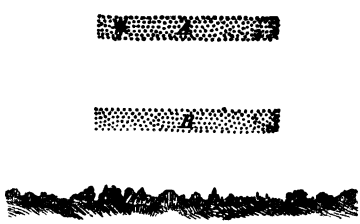


Рис. 95.

Что касается гроз, сопровождающихся громом, молниями, вихрями и громовыми стрелами, которые мне приходилось видеть на суше, то я не сомневаюсь, что они обусловлены нахождением нескольких облаков одного над другим; тогда нередко случается, что более высокие внезапно опускаются на ниже лежащие, так как если два облака A и B (рис. 95) состоят только из очень редкого снега, рассеянного на большом пространстве, и вокруг верхнего A находится более теплый воздух, чем вокруг нижнего B, то очевидно, что теплота этого воздуха может понемногу сгустить его и сделать более тяжелым; вследствие этого выше расположенные частицы, начиная опускаться раньше, будут сбивать вниз и увлекать за собою много других, и все они вместе с большим шумом упадут на нижнее облако. Я вспоминаю, как однажды в мае видел нечто подобное в Альпах, когда снега были нагреты и стали тяжелыми под действием солнца и малейшего движения воздуха было достаточно, чтобы внезапно обвалились большие их массы, называемые, кажется, лавинами, которые, громыхая в долинах, сильно напоминали раскаты грома. Отсюда

становится понятным и то, почему в наших местах грозы бывают зимой реже, чем летом, ибо зимой тепло не может дойти так легко до высоких облаков и рассеять их; и почему если во время сильной жары, когда после северного ветра, длившегося очень недолго, затем ощущается тепло влажное и душное, то это признак, что скоро будет гром; ибо это указывает на то, что северный ветер, пройдя около земли, прогнал тепло в те области воздуха, где образуются самые высокие облака, а после этого он сам был вытеснен расширением нижнего воздуха под влиянием теплых паров, в нем содержащихся, в те области, где образуются самые низкие облака. Вследствие этого наиболее высокие облака, сгущаясь, опускаются, а более низкие, оставаясь разреженными, даже как бы отталкиваются и приподнимаются расширением нижнего воздуха и должны им противодействовать, и нередко может случиться, что они не дадут ни одной частичке упасть на землю. Шум, который таким образом возникает над нами, должен, вследствие резонирования в воздухе, быть слышен лучше, чем шум лавин, и должен быть сам по себе более сильным, так как падение снега его усиливает. Заметьте также, что все различные шумы, производимые громом, могут быть объяснены уже одним тем, что в одних случаях части верхних облаков падают все одновременно, в других — одна за другой, иногда более быстро, иногда более медленно, а нижние облака могут быть более или менее крупными и густыми, и оказывают большее или меньшее сопротивление. Что касается различий в молниях, в вихрях и зарницах, то они зависят лишь от природы летучих тел в том пространстве, которое находится между двумя облаками, и от того, каким образом верхнее облако падает на нижнее: если сначала была большая жара и засуха, так что в этом пространстве содержится большое количество летучих тел, весьма тонких и способных легко воспламеняться, то как бы мало ни было верхнее облако и как бы медленно оно ни опускалось, все же, прогоняя воздух, находящийся между ним и нижним

облаком, оно вызывает там молнию, т. е. легкое пламя, которое тотчас же и исчезает.

Поэтому мы можем видеть молнии, не слыша никакого грома, а бывает даже и так, что облака недостаточно густы, чтобы быть видимыми. Если же, наоборот, в воздухе нет летучих испарений, которым свойственно воспламеняться, то можно слышать шум грома [42], причем никакой молнии не появляется, и если самое высокое облако падает лишь частями, следующими друг за другом, оно причиняет только молнию и гром; но если оно падает все целиком и с большой скоростью, оно может вызвать вихри и удары молнии.

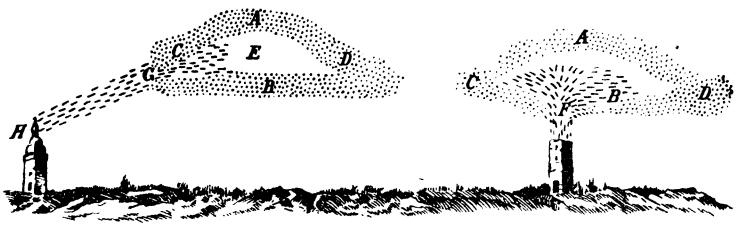


Рис. 96.

Действительно, надо заметить, что его края, как C и D (рис. 96), должны опускаться немного скорее, чем середина, поскольку воздуху, находящемуся внизу, предоставляется более короткий путь для выхода, и он легче уступает у краев; поэтому края скорее коснутся нижнего облака, чем середина, и между обоими [облаками] будет заключено большое количество воздуха, как можно видеть в E; в дальнейшем, когда середина верхнего облака, еще продолжая опускаться, начинает сжимать и вытеснять этот воздух, последнему приходится прорвать нижнее облако, чтобы из него выйти, как это можно видеть в F, или приоткрыть один из его краев, как можно видеть в G. Прорвав таким образом это облако, воздух стремительно опускается к земле, а затем вновь поднимается, вращаясь, ибо он со всех сторон встречает сопротивление, мешающее ему продолжать движение по пря-

мой линии с такой скоростью, какой требует сила его движения. Вследствие этого он образует вихрь, который может не сопровождаться ни громом, ни молнией, если в этом воздухе нет летучих тел, способных воспламеняться; но если они имеются, они собираются все вместе; и так как воздух бурно гонит их к земле, они образуют молнию. Эта молния может сжигать платье и как бы сбривать волосы, оставляя тело нетронутым, если эти испарения, которые обычно имеют запах серы, содержат только жир и масла и дают слабое пламя, способное охватывать только горючие тела; наоборот, она может разбить кости, не повредив мышц, или расплавить шпагу, не испортив ножны, если эти испарения, очень тонкие и проникающие, имеют природу летучих солей или серной кислоты; тогда, не тратя никакого усилия на преодоление тел, ей уступающих, она разбивает и ломает все то, что оказывает ей сильное сопротивление. Так, царская водка растворяет самые твердые металлы и нисколько не действует на воск. Наконец, иногда молния может принять вид твердого камня, ломающего и сокрушающего все на своем пути, если среди этих острых испарений имеется некоторое количество жирных и содержащих серу; а особенно, если имеются еще и более грубые, подобные осадку, находящемуся в дождевой воде, если дать ей отстояться в каком-либо сосуде. Это можно увидеть на опыте: если в известной пропорции смешать такой осадок с селитрой и серой и зажечь эту смесь, из нее внезапно образуется камень. Если облако разрывается сбоку, как в G, молния устремляется вкось и попадает преимущественно в верхушки башен и скал, как можно видеть в H. Но и в этом случае, когда облако разрывается снизу, есть какие-то причины, почему она все же скорее поражает высокие и выдающиеся места, чем иные. Например, если у облака B нет причин прорваться в некоторой точке предпочтительнее, чем в другой, то оно несомненно прорвется в точке, отмеченной через F, вследствие сопротивле-

ния находящейся внизу колокольни. Отметим причину, вызывающую обычно за каждым ударом грома поток дождя и прекращение грома, если этот дождь очень обилен. Если сила, с которой верхнее облако обрушивается на нижнее, падая на него, достаточно велика, чтобы заставить его целиком опуститься, то, очевидно, гром должен прекратиться; а если она недостаточна, то она тем не менее может нередко вызвать несколько снежных хлопьев, которые, растаивая в воздухе, образуют дождь. Есть причина и тому, что большой шум, как колокольный звон и пушечная пальба, могут уменьшить действие грозы; ибо он помогает рассеять и опустить нижнее облако, разрушая снег, из которого оно состоит; об этом хорошо знают те, кто имеет обыкновение путешествовать в долинах, угрожающих лавинами; они стараются даже не говорить и не кашлять, когда проходят по этим местам, из страха, чтобы от звука их голоса не обрушился снег.

Мы уже говорили о том, что иногда молния бывает без грома; например, в тех областях воздуха, где встречается много летучих тел и мало паров, могут образоваться облака столь редкие и легкие, что когда они с достаточной высоты падают друг на друга, все же не слышно никакого грома, и в воздухе они не вызывают грозы, хотя и сосредоточивают и соединяют различные летучие тела; из них они образуют не только маленькие огоньки, похожие на звезды, падающие с неба или пролетающие через него, но и довольно большие огненные шары, которые, достигая нас, представляют как бы молнию в маленьком виде[43]. Поскольку бывают летучие тела разного рода, облака, сжимая их, образуют иногда из них вещества, по цвету и густоте представляющиеся то молоком, то кровью, то мясом, или приобретающие при горении такой вид, что их принимают за железо или камни, или, наконец, дающие начало, после того как сгнили, разным мелким животным; об этом иногда пишут как о чудесах, сообщая, что шел дождь из железа, или из крови, или из саранчи и т. п. [44].

Более того, даже если в воздухе нет никаких облаков, эти летучие тела могут соединяться и загораться от простого дуновения ветров, особенно если имеется два или несколько противоположных течений, которые встречаются друг с другом; наконец, если нет ни ветров, ни облаков, то потому, что тонкое и острое вещество, имеющее природу солей, проникает в поры другого, жирного и содержащего серу. Тогда могут образоваться маленькие огоньки в воздухе — как вверху, так и внизу; вверху это будут звезды, пересекающие небо, а внизу — блуждающие огоньки, играющие в воздухе; некоторые из них останавливаются около различных предметов, например в волосах, в гривах лошадей или на остриях пик, натертых маслом для чистки, и т. п. [45]. Несомненно, что бывает достаточно не только сильного движения, но иногда и одного смешения двух различных тел, чтоб их воспламенить; это можно видеть, если лить воду на известь или плотно закрыть сено раньше, чем оно высохло, и на множестве других примеров, ежедневно встречающихся в химии. Но все эти огни слабы в сравнении с молнией, и причина этого в том, что они состоят лишь из наиболее мягких и липких частиц масел, хотя самые деятельные и острые из солей также принимают участие в их образовании; эти последние не остаются среди других, а, воспламенив их, сразу уходят в свободный воздух. Между тем молния состоит именно из этих деятельных и острых испарений, которые уносят с собою на землю остальные испарения, когда их сжимают и гонят облака. Те, кто знает, какой силой и скоростью обладает пламя селитры и серы, смешанных вместе, тогда как жирная часть серы, свободная от летучих примесей, обладала бы ими лишь в слабой степени, не найдут в этом ничего странного. Что касается продолжительности огней, которые останавливаются или порхают около нас, то они могут быть больше или меньше в зависимости от того, насколько спокойно их пламя и насколько их материя плотна и сжата; но продолжительность огней,

которые видны только в воздухе на большой высоте, всегда может быть лишь очень короткой, потому что даже если бы их материя не была в высокой степени разреженной, они спустились бы под действием тяжести. По моему мнению, философы правы, когда сравнивают их с пламенем, пробегающим вдоль всего столба дыма от только что потушенного факела, если поднести его к другому факелу и зажечь от него. Но меня удивляет, как после этого они могли вообразить, что кометы и огненные столбы или полосы, появляющиеся иногда на небе, состоят из летучих тел, поскольку они продолжаются несравненно дольше.

Я попытался подробно объяснить их образование и их природу в другом сочинении и считаю, что они относятся к метеорам не в большей мере, чем землетрясения и различные минералы, присоединенные сюда же некоторыми писателями; я остановлюсь здесь лишь на огнях особого вида, появляющихся на небе в тихую погоду и дающих повод праздному люду воображать себе эскадроны привидений, сражающиеся в воздухе; в них они видят предзнаменование победы или поражения стороны, за которую они стоят, смотря по тому, преобладает ли в их воображении страх или надежда [46]. Поскольку я никогда не видел подобного зрелища и поскольку я знаю, как часто рассказы о таких вещах искажаются и преувеличиваются суеверием и невежеством, я коснусь лишь в нескольких словах всех причин, которые могут их породить. Первая из них та, что в воздухе находятся облака настолько маленькие, что их можно принять за такое же количество воинов, и они, падая друг на друга, задерживают достаточное количество летучих тел, чтобы вызвать множество мелких молний и выбросить маленькие огоньки, а также, может быть, произвести небольшие шумы, так что все это создает впечатление сражающихся воинов. Вторая причина также в том, что в воздухе имеются подобные облака, но они не падают друг на друга, а заимствуют свой свет от огней и молний какой-либо большой

бури, которая разыгрывается так далеко от этого места, что самую бурю тут нельзя заметить. А третья, — что эти облака или другие, расположенные ближе к северу, от которых они получают свой свет, находятся достаточно высоко, чтоб до них могли доходить солнечные лучи; ибо если принять во внимание преломления и отражения, вызванные двумя-тремя подобными облаками, то окажется, что им вовсе не надо быть очень уж высокими, чтобы произвести на небе в северном направлении такие световые явления после сумерек и даже захода солнца.

Но это скорее относится уже не к этой части, а к следующей, где я собираюсь говорить о всех явлениях, которые можно видеть в воздухе, хотя их там нет; на этом я заканчиваю объяснение тех явлений, которые не только в нем видны, но в действительности существуют.

Глава VIII

О РАДУГЕ [47]

Радуга — столь замечательное чудо природы, и над ее причинами, до сих пор столь мало известными, во все времена столь настойчиво задумывались пытливые умы, что мне трудно найти вопрос, на котором я лучше мог бы показать, каким образом при помощи применяемого мною метода можно притти к знаниям, которыми не обладали те, чьими сочинениями мы располагаем. Во-первых, когда я принял во внимание, что радуга может появляться не только на небе, но также и в воздухе вблизи нас, каждый раз, когда в нем находятся капли воды, освещенные солнцем, как это иногда можно видеть на опыте в фонтанах, мне было легко заключить, что она зависит от того, каким образом лучи света действуют на эти капли, а от них достигают нашего глаза; далее, зная, что эти капли шарообразны, как было доказано выше, и видя, что и при больших, и

при малых каплях радуга появляется всегда одинаковым образом, я поставил себе целью создать очень большую каплю, чтобы иметь возможность лучше ее рассмотреть. Для этого я наполнил водой большой стеклянный сосуд, вполне круглый и вполне прозрачный, и пришел к следующему

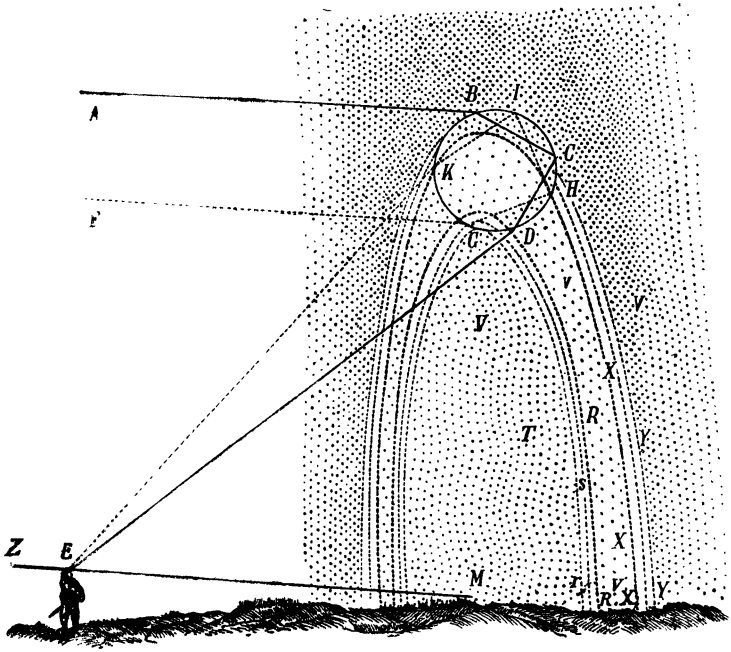


Рис. 97.

выводу: если, например, солнце (рис. 97) находится в части неба, обозначенной через AFZ, а мой глаз — в точке E, и я помещал свой шар в BCD, его часть D казалась мне совершенно красной и значительно более яркой, чем остальное; если я приближался к сосуду или удалялся от него и помещал его вправо или влево [от себя], или даже поворачивал вокруг своей головы, эта часть казалась все такой же красной, если только линия DE составляла угол около 42 градусов с линией EM, соединяющей центр глаза с цен-

тром солнца. Но если я несколько увеличивал этот угол, красный цвет исчезал, если же я его немного уменьшал, то он исчезал не так внезапно, а предварительно разделялся как бы на две менее яркие части, в которых можно было видеть желтый цвет, голубой и другие цвета. Далее, глядя на то место шара, которое обозначено через K, я заметил, что когда угол составлял около 52 градусов, эта часть K также представлялась красной, но менее яркой, чем D; а если я его немного увеличивал, то в ней появлялись и другие более слабые цвета; если же я его чуть-чуть уменьшал или сильно увеличивал, больше никакой окраски не появлялось. Это было для меня явным доказательством того, что если весь воздух, находящийся в M, наполнен такими шариками или, на их месте, каплями воды, то в каждой из этих капель, — для которых линии, проведенные к глазу E, составят угол около 42 градусов с EM и которые я обозначаю через R, — должна появиться точка очень яркого красного цвета; и поскольку мы обозреваем эти точки все вместе, отмечая места, где они находятся, лишь углом, под которым мы их видим, они должны представиться нам в виде непрерывного круга красного цвета. Точно так же должны существовать и точки в S и T, для которых линии, проведенные из E, составляют с EM более острые углы и которые образуют круги более слабой окраски; в этом и состоит первая и главная радуга. Далее, если угол MEX составляет 52 градуса, то в каплях, обозначенных X, должен появиться красный круг, а в каплях, обозначенных Y, — круги более слабых цветов; они вызывают появление второй, побочной радуги; и наконец во всех остальных каплях, обозначенных через V, не появится никаких цветов. Когда я затем рассмотрел подробнее, почему в шарике BCD часть D представлялась красной, я нашел, что здесь дело в лучах солнца, которые, проходя из A в B, преломлялись, входя в воду в точке B, и шли в C, откуда они отражались в D, и преломлялись вновь при выходе из воды, направляясь в E, ибо как только я

помещал непрозрачное или темное тело в каком-либо участке линий AB, CD, BC или DE, этот красный цвет исчезал, а если я закрывал весь шар, кроме точек B и D, и помещал темные тела во всяких иных местах, красный цвет продолжал появляться. Затем, отыскивая причину красного

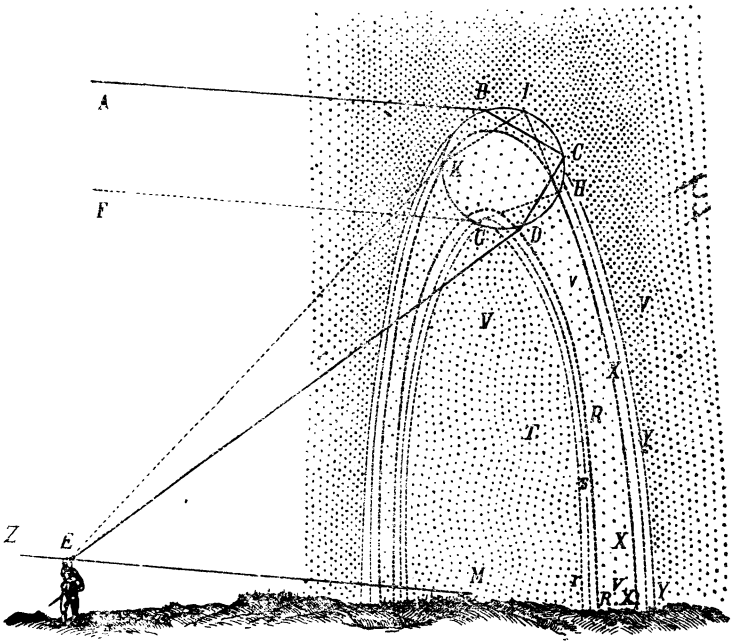


Рис. 98.

цвета, появлявшегося в K (рис. 98), я нашел, что это были солнечные лучи, идущие из F и G, где они преломлялись по направлению к H, а из H отражались в I, а из I вновь отражались в K и, наконец, преломлялись в точке K и направлялись в E. Таким образом, первая радуга происходит от лучей, которые достигают глаза после двух преломлений и одного отражения, а вторая — от других лучей, которые его достигают лишь после двух преломлений и двух отражений; поэтому она не может быть такой яркой, как первая.

Но оставалась еще главная трудность, а именно — выяснить: почему при наличии многих других лучей (которые после двух преломлений и одного или двух отражений могут попасть в глаз, когда шар находится в ином положении) все же лишь те лучи, о которых я говорил, дают различные цвета. Чтоб разрешить эту трудность, я подумал: нет ли еще какого-нибудь предмета, где цвета проявлялись бы подобным же образом, чтобы, сравнив их между собой, я мог судить о причине этих цветов? Затем, вспомнив, что такие цвета можно видеть при помощи хрустальной призмы или треугольника, я рассмотрел такую призму, как изображено здесь, *MNP* (рис. 99) с двумя совершенно плоскими поверхностями *MN* и *NP*, наклоненными друг к другу под углами 30 или 40°, так что если лучи солнца *ABC* проходят через *MN* под прямыми или почти прямыми углами и потому не претерпевают заметного преломления, то они должны испытывать значительное преломление, выходя через *NP*. И, закрывая одну из этих поверхностей темным предметом, в котором имелось достаточно узкое отверстие *DE*, я заметил, что лучи, проходя через это отверстие и падая оттуда на белое полотно или бумагу *FGH*, дают все цвета радуги, причем красное всегда рисуется в *F*, а синее или фиолетовое — в *H*. Из этого я заключил, во-первых, что кривизна поверхностей водяных капель не является необходимым условием для появления этих цветов, ибо поверхности кристалла были совсем плоские; не существенна и величина угла, под которым они видны, ибо здесь угол может быть изменен, причем они не изменяются; и хотя мы можем заставить лучи, идущие в *F*, преломляться больше или

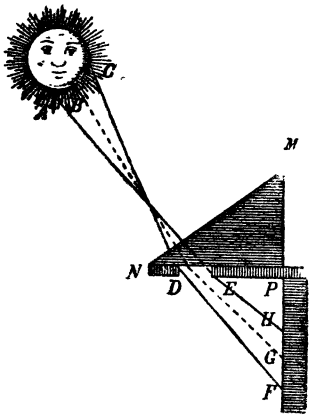


Рис. 99.

меньше, чем лучи, идущие в H, все же они всегда будут давать красный цвет, а лучи, идущие в H, всегда дадут синий; не играет роли и отражение, ибо здесь его вовсе нет; ни, наконец, многократные преломления, ибо здесь имеет место только одно. Но я заключил, что одно преломление все же необходимо, и притом такое, действию которого не противодействовала бы обратная рефракция; ибо опыт показывает, что если поверхности MN и NP параллельны, то лучи, преломляясь в одной из них в одну сторону в такой же мере, как вторая преломляет их в другую, не дали бы упомянутых цветов. Я не сомневался, что необходим также и свет, ибо без света ничего не видно; и, кроме того, я заметил, что необходима и тень, т. е. ограничение этого света: ибо если удалить темное тело, находящееся на NP, цвета FGH перестают появляться; а если сделать отверстие DE достаточно большим, то красное, оранжевое и желтое, получающиеся в F, не распространятся вследствие этого далее; то же относится и к зеленому, синему и фиолетовому, получающимся в H, и весь избыток пространства, заключенный между ними в G, останется белым. После этого я попытался объяснить, почему эти цвета в F иные, чем в H, хотя и преломление, и тень, и свет участвуют в их возникновении одинаковым образом. Принимая во внимание происхождение света, как я объяснил его в „Диоптрике", — а именно как действие или движение некоторой весьма разреженной материи, частички которой надо представить себе в виде маленьких шариков, катающихся в порах земных тел, — я понял, что эти шарики могут кататься различным образом, в зависимости от различных причин, определяющих их движение. В частности, всякое преломление, направленное в одну сторону, заставляет их вращаться в одном направлении, но когда у них не имеется соседних, которые двигались бы значительно быстрее или медленнее, чем они, их вращение будет лишь примерно одинаково с их движением по прямой линии. Если же по одну их сторону

имеются шарики, движущиеся менее быстро, по другую — движущиеся быстрее или с такой же скоростью, как это бывает на границе тени и света, то если они встречают движущиеся медленнее с той стороны, в которую они катятся (как это имеет место для шариков, составляющих луч *EH*) (рис. 100), их скорость вращения замедляется по сравнению со скоростью движения по прямой; обратное получается, если они встречают их с другой стороны, как это имеет место для шариков, составляющих луч *DF*. Чтобы лучше это понять, представьте себе, что мы толкнули шарик *1234* (рис. 101) из *V* к *X* так, что он движется только по прямой линии, и обе его стороны *13* опускаются с одинаковой скоростью к поверхности воды *YY*, где движение стороны *3*, которая раньше встречает эту поверхность, замедляется, тогда как движение стороны *1* еще продолжается; тогда весь шарик непременно начнет вращаться в порядке цифр *1 2 3*. Представьте себе теперь, что наш шарик окружен четырьмя другими, *Q*, *R*, *S*, *T*, из которых два, *Q* и *R*, стремятся двигаться к *X* быстрее, чем он, а два других, *S* и *T*, стремятся к *X* с меньшей силой; тогда, очевидно, *Q* будет толкать часть, обозначенную через *1*, а *S* — задерживать часть, обозначенную через *3*, и его вращение усилится; *R* и *T* этому препятствовать не будут, ибо *R* стремится двигаться к *X* быстрее, чем он за ним следует, а *T* не стремится следовать за ним столь быстро, как он его опережает, что и объясняет действие луча *DF*. Далее, наоборот, если *Q* и *R* стремятся к *X* медленнее, чем он, а *S* и *T* — быстрее, то *R* препятствует вращению части, обозначенной через *1*, а *T* — части, обозначенной *3*, а *Q* и *S*

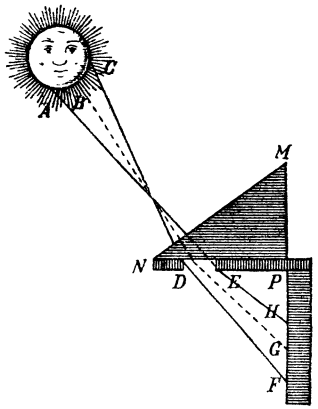


Рис. 100.

не будут играть здесь никакой роли, что объясняет действие луча *EH* в рис. 100. Но следует заметить, что поскольку шарик *1 2 3 4* имеет правильную сферическую форму, легко может случиться, что если два других, *R* и *T*, сожмут его слишком сильно, он отразится, вращаясь вокруг оси *4 2*, вместо того чтобы замедлить свое вращение под их действием; таким образом, изменяя в некоторый момент свое положение, он затем станет вращаться в порядке цифр *3 2 1*; ибо два шарика, *R* и *T*, которые заставили его начать поворот, принуждают его продолжать, пока он не закончит пол-оборота в этом направлении, и они смогут ускорить его вращение, вместо того чтоб его замедлить. Это помогло мне разрешить главное затруднение, встретившееся мне в этом вопросе; на основании этого всего, как мне кажется, доказывается с очевидностью, что природа цветов, появляющихся в *F*, заключается лишь в том, что частицы разреженной материи, передающей действие света, стремятся с большей силой вращаться, чем двигаться по прямой линии; таким образом те, которые вращаются с гораздо большей силой, дают красный цвет, а те, которые вращаются лишь немного сильнее, дают желтый. Наоборот, природа цветов, которые видны в *H*, зависит лишь от того, что эти мелкие частицы вращаются не столь сильно, как это им свойственно, когда не существует особой причины, им препятствующей, так что зеленый цвет появляется там, где они вращаются немного медленнее, а синий — там, где они вращаются медленнее; обычно на краях этого синего примешивается алый, который, придавая ему яркость

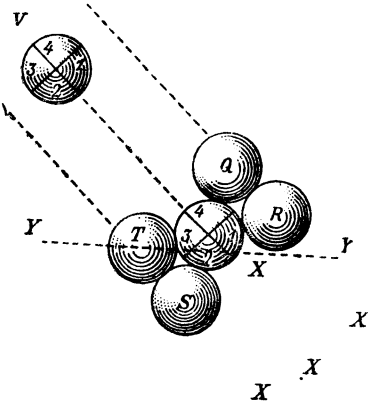


Рис. 101.

и блеск, изменяет его в фиолетовый или пурпуровый. Это происходит, без сомнения, оттого, что та же причина, которая обычно задерживает вращение частиц разреженной материи, имеет тогда достаточно силы, чтоб заставить некоторые из них изменить положение, и должна ускорить вращение одних, замедляя в то же время вращение других. И во всем этом рассуждение так совершенно согласуется с опытом, что, по-моему, хорошо познав то и другое, невозможно сомневаться в том, что дело происходит именно так, как я это сейчас объяснил. Ибо если верно, что ощущение света, которое мы испытываем, причиняется движением или стремлением к движению некоторой материи, касающейся наших глаз, как на это указывают и многие другие соображения, то несомненно, что различные движения этой материи должны вызывать в нас различные ощущения; а так как в этих движениях не может быть иных различий, чем те, о которых я упоминал, то и опыт не обнаруживает нам иных различий в ощущениях, которыми себя проявляют эти движения, кроме различий в цветах. Нет возможности найти в кристалле *MNP* (рис. 102) что-либо другое, что могло бы служить причиной цветов, кроме только способа, каким он отбрасывает мелкие частицы тонкой материи на полотно *FGH*, а оттуда в наши глаза. Отсюда, мне кажется, достаточно очевидно, что не следует искать чего-либо иного и в тех цветах, какими представляются окрашенными другие предметы; ибо обычный опыт свидетельствует о том, что для составления всех других цветов достаточно света, или белого, и тени, или черного, наряду с цветами радуги, происхождение которых было здесь объяснено. Я ничего не нахожу хорошего в различии, какое

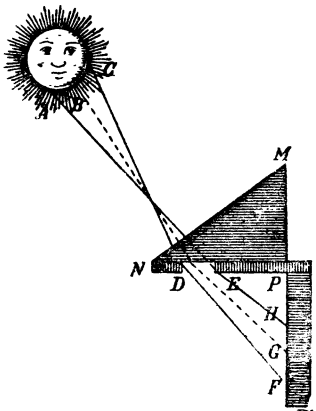


Рис. 102.

делают философы, говоря, что есть цвета, которые надо считать истинными, и другие, которые являются лишь ложными или кажущимися, ибо поскольку вся их истинная природа в том, чтобы представляться нам, то, мне думается, говорить, что они ложны и что они представляются, это противоречиво. Но я признаю, что тень и преломление не всегда необходимы, чтобы их произвести, и что наряду с этим величина, форма, расположение и движение частиц тех тел, которые называются окрашенными, могут различным образом содействовать свету в том, чтобы усиливать или ослаблять вращение частиц разреженной материи. Я даже вначале усомнился в отношении радуги, получаются ли ее цвета совершенно так же, как и в кристалле *MNP*, ибо в ней я не мог обнаружить тени, которой бы заканчивался свет; я еще не знал, почему цвета появлялись там лишь под известными углами, пока я не взял перо и не вычислил подробно хода всех лучей, которые падают на различные точки водяной капли, чтоб узнать, под какими углами они могут попасть в наш глаз после двух преломлений и одного или двух отражений. Тогда я нашел, что после одного отражения и двух преломлений оказывается гораздо больше лучей, которые могут быть видны под углом от 41 до 42 градусов, чем таких, которые видны под каким-либо меньшим углом, и нет ни одного, который был бы виден под бóльшим. Далее я нашел также, что после двух отражений и двух преломлений имеется гораздо больше лучей, падающих в глаз под углом от 51 до 52 градусов, чем таких, которые падали бы под каким-либо бóльшим углом, и нет совсем таких, которые падали бы под меньшим. Вследствие этого получается тень, ограничивающая по одну и по другую сторону свет, который, пройдя через бесчисленное количество дождевых капель, освещенных солнцем, попадает в глаз под углом в 42 градуса или немного менее и дает, таким образом, первую и главную радугу; получается также и тень, ограничивающая свет, падающий под углом в 51 градус или немного

больше и дающий внешнюю радугу; ибо, если глаз не получает никаких световых лучей или получает их значительно меньше от одного какого-либо предмета, чем от другого, к нему близкого, то, значит, он видит тень. Это ясно доказывает, что цвета этих радуг возникают от той же причины, что и цвета, получаемые при помощи кристалла *MNP* (рис. 103), и что полудиаметр внутренней радуги не должен быть более 42 градусов, а внешней радуги — меньше 51 градуса; наконец, первая должна быть значительно резче ограничена по внешней окружности, чем по внутренней, а вторая — наоборот, как это и можно видеть на опыте. Но чтобы те, кто знают математику, могли судить, достаточно ли правильны сделанные мною вычисления для этих лучей, мне следует их здесь пояснить.

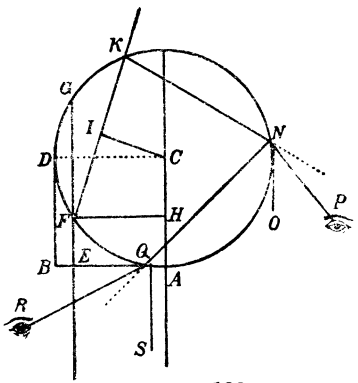


Рис. 103.

Пусть *AFD* (рис. 103) — капля воды, полудиаметр которой *CD* или *AB* я делю на столько равных частей, сколько я хочу вычислить лучей, чтобы на долю одних пришлось столько же света, сколько и на долю других[48]. Затем я рассматриваю один из этих лучей в отдельности, например *EF*, который, вместо того чтобы пройти прямо в *G*, отклоняется в *K*, а из *K* отражается в *N*, а оттуда идет в глаз *P*; или отражается еще раз из *N* в *Q*, и оттуда отклоняется к глазу *R*. Если провести *CI* под прямым углом к *FK*, я знаю из того, что было сказано в „Диоптрике“, что *AE* или *HF* и *CI* находятся между собой в отношении, которым измеряется преломление воды; так что если *HF* содержит 8000 частей таких, каких *AB* содержит 10000, то *CI* будет содержать их примерно 5984, ибо преломление воды немного больше, чем отношение трех к четырем, и, насколько точно я мог

его измерить, оно составляет 187 к 250. Имея, таким образом, две прямые HF и CI, я легко нахожу две дуги: FG, которая равна 73 градусам 44 минутам, и FK, которая равна 106.30. Затем, вычитая удвоенную дугу FK из суммы дуги FG и 180 градусов, я получаю 40.44 для величины угла ONP, ибо я предполагаю ON параллельным EF. И, отнимая эти 40.44 из FK, я получаю 65.46 для угла SQR, ибо я полагаю также SQ параллельным EF. Вычисляя таким же способом все другие лучи, параллельные EF, которые проходят через деления диаметра AB, я составляю следующую таблицу:

Линия HF	Линия CI	Дуга FG	Дуга FK	Угол ONP	Угол SQR
1000	748	168.30	171.22	5.40	165.45
2000	1496	156.55	162.48	11.19	151.29
3000	2244	145.4	154.4	17.56	136.8
4000	2992	132.50	145.10	22.30	122.4
5000	3740	120	136.4	27.52	108.12
6000	4488	106.16	126.40	32.56	93.44
7000	5236	91.8	116.51	37.26	79.25
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
10000	7480	0	83.10	31.40	69.30

Легко видеть из этой таблицы, что имеется гораздо больше лучей, составляющих угол ONP приблизительно в 40 градусов, чем лучей, которые составляли бы меньший угол или угол SQR приблизительно в 54 градуса, чем лучей, которые составляли бы бóльший угол; чтобы сделать ее еще более точной, я даю:

Линия HF	Линия CI	Дуга FG	Дуга FK	Угол ONP	Угол SQR
8000	5984	73.44	106.30	40.44	65.46
8100	6058	71.48	105.25	40.58	64.37
8200	6133	69.50	104.20	41.10	63.10

Продолжение

Линия *HF*	Линия *CI*	Дуга *FG*	Дуга *FK*	Угол *ONP*	Угол *SQR*
8300	6208	67.48	103.14	41.20	62.54
8400	6283	65.44	102.9	41.26	61.43
8500	6358	63.34	101.2	41.30	60.32
8600	6432	61.22	99.56	41.30	58.26
8700	6507	59.4	98.48	41.28	57.20
8800	6582	56.42	97.40	41.22	56.18
8900	6657	54.16	96.32	41.12	55.20
9000	6732	51.41	95.22	40.57	54.25
9100	6806	49.0	94.12	40.36	53.36
9200	6881	46.8	93.2	40.4	52.58
9300	6956	43.8	91.51	39.26	52.25
9400	7031	39.54	90.38	38.38	52.0
9500	7106	36.24	89.26	37.32	51.54
9600	7180	32.30	88.12	36.6	52.6
9700	7255	28.8	86.58	34.12	52.46
9800	7330	22.57	85.43	31.31	54.12

и я вижу отсюда, что самый большой угол *ONP* может быть равен 41 градусу 30 минутам, а самый маленький *SQR* — 51 градусу 54 минутам; прибавляя или отнимая приблизительно 17 минут для полудиаметра солнца, имею 41.47 для наибольшего полудиаметра внутренней радуги и 51.37 — для наименьшего полудиаметра внешней.

Правда, когда вода бывает теплая, ее преломление немного меньше, чем когда она холодная, что может несколько изменить эти вычисления, но это могло бы увеличить полудиаметр внутренней радуги лишь самое большее на один или два градуса, и тогда полудиаметр внешней будет почти в два раза меньше. Это заслуживает быть отмеченным, ибо отсюда можно доказать, что преломление воды не может быть ни больше, ни меньше, чем я предпо-

лагаю; действительно, если бы оно было больше, оно сделало бы полудиаметр внутренней радуги меньшим, чем 41 градус, тогда как согласно общепринятому мнению его считают за 45, а если предположить его настолько малым, чтобы этот полудиаметр действительно получился равным 45, то окажется, что полудиаметр внешней радуги будет также не более 45, тогда как он кажется глазу значительно больше, чем для внутренней. И Мавролик, который, как мне кажется, первый определил один из них в 45 градусов, определяет другой приблизительно в 56, что показывает, как мало можно верить наблюдениям, не сопровождаемым правильными рассуждениями.

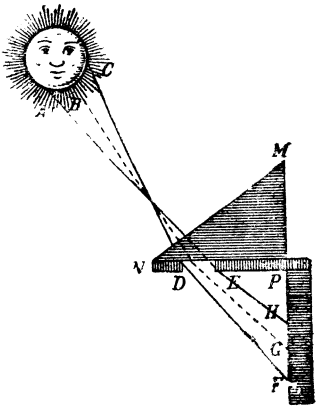


Рис. 104.

Впрочем, мне не стоило труда узнать, почему красный цвет находится снаружи у внутренней радуги или почему он находится внутри у внешней; ибо та же причина, по которой красный цвет виден через призму MNP (рис. 104) в F, а не в H, вызывает следующее: если поместить глаз на месте белого полотна FGH и смотреть на эту призму, мы увидим красный цвет в более толстой ее части MP, а синий — в N; это происходит потому, что окрашенный в красное луч, идущий в F, исходит из C, т. е. части солнца, более близкой к MP; и по той же причине, поскольку центр водяных капель, а стало быть более толстая их часть, находится снаружи по отношению к окрашенным точкам, образующим внутреннюю радугу, то и красный цвет должен появляться в ней снаружи; и поскольку этот центр находится внутри по отношению к точкам, образующим внешнюю радугу, то и красный цвет также должен появляться в ней внутри.

Итак, я полагаю, что в этом вопросе не остается более никаких трудностей, разве только в отношении некоторых

неправильностей, которые здесь встречаются, например если радуга бывает не в точности круглая или ее центр не лежит на прямой, проходящей через глаз и через солнце, что может случиться, когда ветер изменяет форму дождевых капель; ибо, если капли хоть немного теряют свою округлость, это уже создает большую разницу в угле, под которым должны быть видны цвета. Иногда, как мне говорили, случалось видеть и радугу, настолько перевернутую, что ее рога были направлены вверх, как изображено здесь в *FF* (рис. 105); по-моему, это могло бы быть связано только

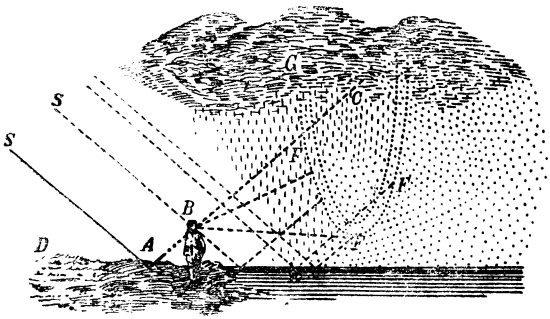


Рис. 105.

с отражением солнечных лучей от водной поверхности моря или какого-либо озера; тогда, исходя из части *SS* небесного свода, они падали бы на воду *DAE* и отсюда отражались бы к дождевым каплям *CF*, и глаз видел бы дугу *FF* с центром в точке *C*, так что, если бы продолжить *CB* до *A*, — причем *AS* проходит через центр солнца, — углы *SAD* и *BAE* были бы равны, а угол *CBF* был бы примерно равен 42 градусам. Однако для этого нужно также, чтобы не было никакого ветра, который мог бы вызывать волны на поверхности воды в *E*, и может быть еще, чтобы имелось какое-нибудь облако, как *G*, которое препятствовало бы свету солнца, идущему прямо по направлению к дождю, пересиливать свет, падающий туда от воды *E*; поэтому такая радуга встречается редко. Кроме того, глаз может

занимать такое положение относительно солнца и относительно дождя, что будет видеть нижнюю часть, заканчивающую дугу радуги, не видя верхней, и тогда ее можно будет принять за перевернутую дугу, хотя она будет видна не на небе, а на воде или на земле.

Мне говорили также, что иногда случалось видеть и третью радугу над двумя обычными, но она была гораздо слабее и была примерно настолько же удалена от второй, как вторая от первой; по-моему, этого быть не могло, разве

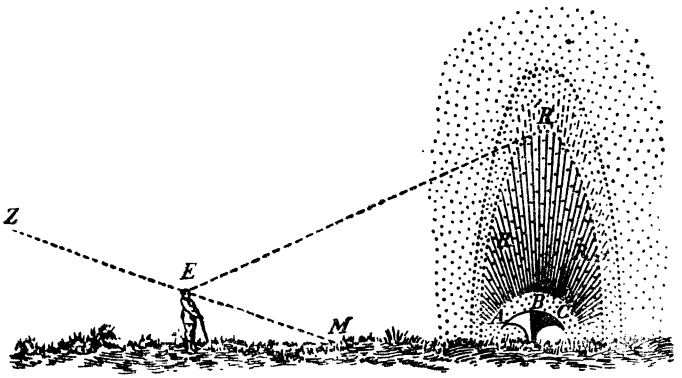


Рис. 106.

только если к дождю были примешаны градины, очень крупные и прозрачные, в которых преломление значительно больше, чем в воде[49], и тогда внешняя радуга должна была быть гораздо больше и потому казалась расположенной над другой. А внутренняя, которая по той же причине должна была быть меньше внутренней дождевой, могла остаться вовсе незамеченной вследствие большой яркости этой последней; или, может быть, их края слились и их сочли за одну, но такую, в которой цвета расположены иначе, чем обыкновенно.

Это заставляет меня вспомнить одно изобретение, с помощью которого можно показывать знамения на небе, что может повергнуть в большое удивление тех, кому не известны их причины. Я предполагаю, что вы уже знаете, как можно

показать радугу при помощи фонтана. Если вода, выходя через мелкие отверстия ABC (рис. 106), бьет достаточно высоко и разбивается в воздухе во все стороны в R и если солнце находится в Z, так что ZEM располагается по прямой линии, угол MER равен примерно 42 градусам, глаз E не преминет увидеть в R радугу, вполне подобную той, какая появляется на небе. К этому нужно теперь добавить, что есть масла, спирты и другие жидкости, в которых преломление происходит в значительно большей или меньшей степени, чем в обыкновенной воде, но которые от этого не менее светлы и прозрачны; тогда, если расположить друг за другом несколько фонтанов, состоящих из различных подобных жидкостей, можно было бы с их помощью увидеть целый участок неба, покрытый радужными цветами; для этого нужно, чтобы жидкости с более сильным преломлением находились ближе к зрителям и не поднимались настолько высоко, чтобы заслонять находящиеся позади. При этом, поскольку, закрывая часть отверстий ABC, можно заставить исчезнуть по желанию ту или иную часть радуги RR, не уничтожая остальных, то легко понять, что точно так же, закрывая и открывая определенным образом отверстия этих различных фонтанов, можно достичь того, что часть, представляющаяся окрашенной, будет иметь форму креста или столба, или иного предмета, вызывающего удивление. Но я должен признать, что для этого требуется много искусства и расходов, так как нужно соразмерить эти фонтаны и заставить жидкости бить настолько высоко, чтобы изображения были видны издалека для целой толпы народа и чтобы при этом фокус не мог быть разоблачен.

Глава IX

ОБ ОКРАСКЕ ОБЛАКОВ И О КРУГАХ ИЛИ ВЕНЦАХ, КОТОРЫЕ ИНОГДА ВИДНЫ ВОКРУГ СВЕТИЛ

После того, что я сказал о природе цветов, мне кажется, уже мало осталось добавить относительно тех цветов, которые видны в облаках; прежде всего, если говорить о их

белизне или об их темноте и черном цвете, то они зависят лишь от того, в какой степени, большей или меньшей, облака освещаются светилами или затемняются самими собой или соседними облаками. Здесь надо, однако, отметить два обстоятельства. Одно, что поверхности прозрачных тел отражают часть лучей, на них падающих, как я уже сказал выше; вследствие этого свет может легче проникнуть сквозь три слоя воды, чем через малое количество пены, хотя она не что иное, как вода; но в ней имеется много поверхностей, и первая из них отражает часть этого света, а вторая — еще часть, и так далее, так что вскоре не остается никакого или почти никакого света, который прошел бы насквозь. И поэтому ни толченое стекло, ни снег, ни облака, если они сколько-нибудь густы, не могут быть прозрачными [50]. Второе, что надо здесь отметить, следующее: хотя действие светящихся тел состоит только в том, что они толкают по прямой линии разреженную материю, касающуюся наших глаз, однако обычное движение мелких частиц этой материи, по крайней мере тех, которые находятся в воздухе вокруг нас, состоит в том, что они катятся так же, как мяч катится по земле, хотя ему дали толчок лишь по прямой линии. Их заставляют катиться таким образом как раз те тела, которые называются белыми: то же относится, без сомнения, и к телам, которые непрозрачны лишь вследствие многочисленности своих поверхностей, как пена, толченое стекло и облака.

Отсюда же можно понять, почему небо совершенно чистое и без всяких облаков кажется нам голубым, раз мы знаем, что оно само по себе не дает никакого света и что оно казалось бы совершенно черным, если бы над нами не было никаких паров и летучих веществ; на самом же деле, они всегда имеются в большем или меньшем количестве, и отражают к нашему глазу некоторые лучи, иными словами, отталкивают к нам мелкие частицы разреженной материи, отброшенные к ним солнцем или другими светилами;

таким образом, когда этих паров достаточно много, первые из них сначала отталкивают к нам разреженную материю, а затем она сталкивается с остальными, которые заставляют ее мелкие частички катиться и вращаться прежде, чем они дойдут до нас. Тогда небо кажется белым; если же паров не настолько много, чтобы они могли заставить ее частицы вращаться, оно должно казаться голубым, согласно тому, что было сказано ранее о природе голубого цвета. И по той же причине морская вода в тех местах, где она очень чиста и очень глубока, кажется голубой, ибо отражает с поверхности лишь немного лучей, и ни один из тех, что в нее проникают, не возвращается обратно. Более того, мы можем понять теперь, почему, когда солнце восходит или заходит, целая часть неба, где оно находится, представляется красной. Это бывает тогда, когда между нами и солнцем нет такого количества облаков или скорее тумана, чтобы свет не мог сквозь них проникнуть; но он проникает сквозь них у самой земли не так легко, как несколько выше, а чем выше, тем легче, так как свет, претерпевая преломление в этих туманах, заставляет частицы разреженной материи, его передающие, вращаться в том же направлении, в каком вращался бы двигающийся с той же стороны мяч, катясь по земле. Таким образом, вращение ниже лежащих частиц всегда усиливается действием выше лежащих, ибо оно сильнее, чем у этих более низких, а вы знаете, что это вызывает появление красного цвета, который, отражаясь затем в облаках, может распространиться на небе во все стороны; нужно заметить, что когда красный цвет появляется утром, он предвещает ветры или дождь. В самом деле, он свидетельствует о том, что на востоке мало облаков, и солнце сможет поднять до полудня много паров, и о том, что туманы, вызывающие этот красный цвет, начинают подниматься; вечером же он является признаком хорошей погоды, так как если на западе облаков мало или нет вовсе, то должны господствовать восточные ветры, и туманы ночью опустятся.

Я не останавливаюсь более подробно на других цветах, которые можно видеть в облаках, ибо полагаю, что их причины уже все объяснены сказанным мною; но вокруг светил иногда появляются круги, объяснение которых мне не следует опускать[51]. Они подобны радуге в том отношении, что бывают круглые или почти круглые, и окружают всегда солнце или какое-либо другое светило; это показывает, что они происходят от какого-то отражения или преломления, углы которых почти одинаковы; они подобны ей также в том отношении, что окрашены, и, стало быть, здесь имеет место преломление и тень, ограничивающая тот свет, который их производит. Но они отличны от радуги в том отношении, что радуга бывает видна только тогда, когда дождь идет в том направлении, где она находится, причем в том месте, где находится наблюдатель, дождя может не быть, а эти кольца никогда не видны в том месте, где идет дождь; это показывает, что они вызываются преломлением не в каплях воды или в градинах, а в тех мелких прозрачных ледяных кристаллах, о которых говорилось выше. Трудно было бы представить себе в облаках иную причину, которая могла бы произвести подобное действие; и хотя мы знаем, что такие кристаллы падают только тогда, когда холодно, но разум убеждает нас в том, что они образуются и во всякое время года. Поскольку необходимо известное тепло, чтобы сделать их прозрачными из белых, какими они бывают первоначально, можно считать правдоподобным, что лето более для этого благоприятно, чем зима. Далее, хотя бóльшая часть падающих звездочек представляется глазу совершенно плоскими и гладкими, тем не менее они все немного толще в середине, чем по краям, как можно видеть у некоторых из них; чем больше или меньше эта разница, тем больше или меньше и вызываемые ими кольца, так как они бывают разных величин. Если те, которые наблюдаются чаще всего, имеют, как пишут некоторые, диаметр около 45 градусов, то я думаю, что частицы льда, образующие кольца такой величины, имеют

выпуклость, более всего им свойственную и, может быть, наибольшую, какую они обычно приобретают, прежде чем окончательно растаять. Пусть, например, ABC (рис. 107) — солнце, D — глаз, EFG — несколько мелких ледяных частиц, находящихся рядом друг с другом, как они располагаются при своем образовании; пусть их выпуклость такова, что луч, идущий, например, из точки A на край частицы, обозначенной через G, а из точки C — на край, обозначенный через F, возвращается в D, и пусть в D приходят еще некоторые лучи из числа тех, которые проходят через другие ледяные частицы, находящиеся в E, но не приходит ни один из лучей, проходящих через частицы, находящиеся по ту сторону круга GG. Ясно, что лучи AD, CD и т. п., идущие по прямой линии, дают изображение солнца обычной величины; другие лучи, преломляющиеся в EE, должны сделать всю площадь, заключенную в кольце FF, достаточно яркой, вследствие чего пространство между кругами GG и FF представляется как бы венцом, окрашенным в цвета радуги. При этом красное у них должно быть внутри, в F, а голубое — снаружи, в G, как это обычно и наблюдается. Если имеется два или несколько слоев ледяных частиц один над другим, то, если только это не препятствует прохождению солнечных лучей, те из лучей, которые пройдут через две частицы по их краям, преломляясь почти вдвое сильнее, чем другие, дадут еще один окрашенный круг значительно большей

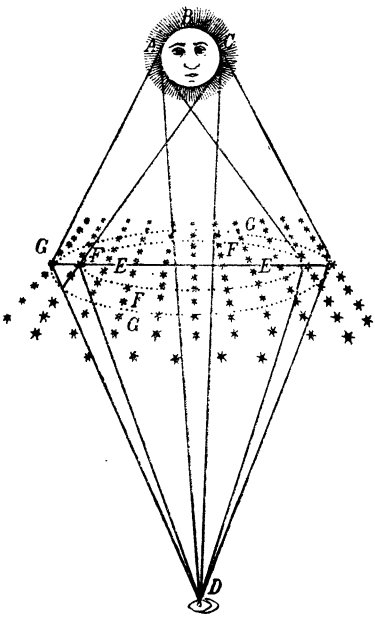


Рис. 107.

окружности, но менее явственный, чем первый; и мы тогда увидим два венца один внутри другого, причем внутренний ярче окрашен, как это иногда и наблюдалось. Кроме того, вы можете хорошо представить себе, почему такие венцы обычно не образуются вокруг светил, находящихся очень низко над горизонтом: это происходит оттого, что лучи падают на ледяные частицы слишком отлого, чтобы пройти сквозь них; их цвета не так ярки, как цвета радуги, так как они образуются путем значительно более слабых преломлений; они появляются вокруг луны чаще, чем радуга, и даже наблюдаются иногда вокруг звезд, когда ледяные частички, лежащие на пути лучей, очень мало выпуклы, так что образуют очень маленькие венцы; поскольку они вызываются не столь большим числом преломлений и отражений, то свету, их образующему, не нужно быть столь сильным. Но часто они бывают и белыми, не столько из-за недостатка света, сколько из-за того, что материя, в которой они образуются, не вполне прозрачна.

Можно было бы представить себе и другие кольца, которые, подобно радуге, образовались бы в водяных каплях, например после двух преломлений без каких-либо отражений; но тогда ничто не определяло бы их диаметра, и свет не ограничивался бы тенью, как это требуется для появления цветов; или двумя преломлениями и тремя или четырьмя отражениями, но тогда их свет был бы чрезвычайно слаб, и его легко мог бы уничтожить свет, отражающийся от поверхности этих же самых капель. Поэтому я сомневаюсь, чтобы они вообще могли появляться, а вычисление показывает, что их диаметр должен бы быть значительно больше диаметра тех венцов, которые обычно наблюдаются.

Наконец, что касается венцов, которые видны иногда вокруг ламп или факелов, то их причину следует искать не в воздухе, а в самом глазу, который на них смотрит. Мне случилось видеть на опыте убедительное подтверждение этого прошлым летом. Я путешествовал ночью на корабле

и весь вечер опирался головой на свою руку, которой я прикрывал мой правый глаз, в то время как левым я смотрел на небо. В каюту, где я находился, принесли свечу; и тут, открыв оба глаза, я увидел вокруг пламени два венца, окраска которых была столь яркой, какой я никогда не наблюдал в радуге. Больший из них AB (рис. 108), который был красным в A и синим в B; CD — меньший, который был также красным в C, но в D он был белым и простирался до самого пламени. После этого, закрыв правый глаз, я заметил, что венцы исчезли; напротив, когда я открывал и закрывал левый глаз, они продолжали появляться; это

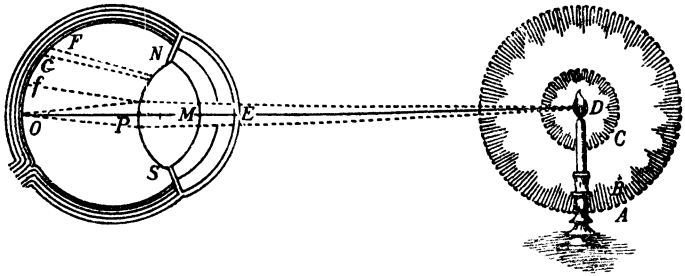


Рис. 108.

убедило меня в том, что они происходили в зависимости от какого-то определенного искажения роговицы правого глаза, которое произошло, когда я его держал закрытым; вследствие этого не только большая часть лучей от пламени, которые в него попадали, давала изображение пламени в O, где они собирались, но были некоторые лучи, которые отклонились настолько, что распространились на всю область fO, где и дали венец CD; и другие — на область FG, где они дали венец AB. Я не определяю, какое именно это было искажение, ибо несколько различных видов искажений могут дать тот же результат; например, если на какой-либо из поверхностей E, M, P глаза, имеющих сферическую форму с центрами на линии EO, имеется хотя бы одна или две маленькие морщинки, какие часто бывают в виде прямых линий, пересекающихся на прямой EO, то они вызывают появление боль-

ших лучей, рассеянных тут и там вокруг факелов; или если между E и P (рис. 109) находится какое-нибудь непрозрачное тело, или оно находится где-либо в стороне, но имеет вид круга, или, наконец, если жидкости или ткани в глазу каким-нибудь образом изменили свои свойства или форму, то могут получиться такие явления; действительно, те, у кого болят глаза, часто видят такие венцы, которые не всем кажутся одинаковыми. Нужно только заметить, что внешняя часть венцов, как A и C, обычно бывает красной, в противоположность тому, что мы видим вокруг светил, и причина этого станет вам ясной, если вы учтете, что в образовании их цветов

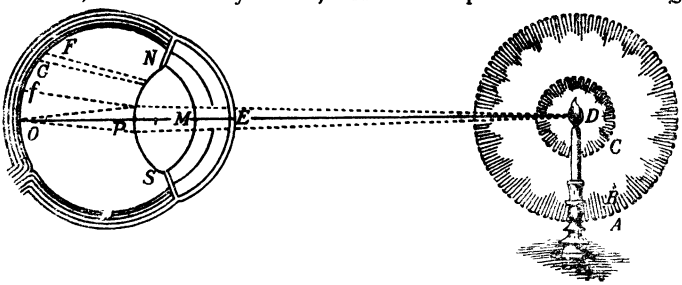


Рис. 109.

хрусталик PNM играет роль стеклянной призмы, о которой мы говорили, а дно глаза FGf — роль полотна, помещенного позади. Но вы спросите, может быть: почему же, если хрусталик обладает этой способностью, он не окрашивает таким же образом все предметы, которые мы видим? Если вы рассматриваете лишь те лучи, которые исходят от всех точек этих предметов ко всем точкам глазного дна, то одни, которые проходят по его стороне, обозначенной через N, и другие — по стороне, обозначенной через S, оказывают противоположные действия, которые взаимно уничтожаются, во всяком случае, поскольку это относится к возникновению цветов; здесь лучи, идущие к FGf, проходят только через N. И все это так хорошо согласуется с тем, что я сказал о природе цветов, что может, по-моему, в большой мере служить для подтверждения истинности сказанного [52].

Глава X

О ПОЯВЛЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ СОЛНЦ

Иногда приходится видеть в облаках и другие кольца, отличающиеся от тех, о которых я только что говорил, тем, что они всегда бывают совершенно белыми, и светила не находятся в их центре, а кольца обычно проходят через центр солнца или луны и кажутся параллельными или почти параллельными горизонту. Но так как они появляются только в больших, совершенно круглых облаках, о которых говорилось выше, и так как иногда в одних и тех же облаках бывает видно несколько солнц или несколько лун, то мне надлежит объяснить вместе и то, и другое. Пусть, например, A (рис. 110) представляет юг, где находится солнце, сопровождаемое теплым ветром, дующим в B, а C — север, откуда исходит холодный ветер, также направленный в B; там, по моему предположению, оба эти ветра встречают или собирают облако, состоящее из частиц снега и простирающееся так далеко в глубину и в ширину, что эти ветры не могут пройти — один над облаком, другой под ним, как это бывает обычно, а вынуждены обходить его кругом. Благодаря этому они округляют это облако, но, поскольку южный ветер является теплым, он растопляет некоторое количество снега по краю облака; однако этот снег сейчас же замерзает вновь — частью под влиянием холодного северного ветра, частью благодаря близости снега, лежащего внутри и еще не успевшего растаять; таким образом, может получиться как бы большое ледяное кольцо[53], непрерывное и прозрачное, и его поверхность

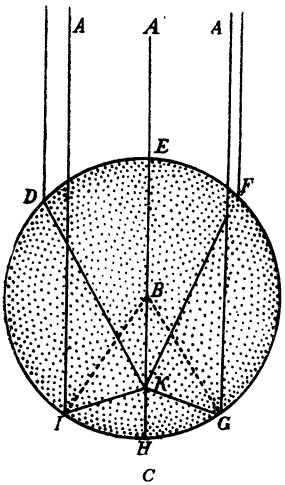


Рис. 110.

будет достаточно гладкой, ибо ветры, которые его округляют, весьма равномерны. Кроме того, лед будет более толстым со стороны *DEF*, которую я предполагаю обращенной к теплому ветру и к солнцу, чем со стороны *GHI*, где снег не мог растаять так легко. Наконец, нужно заметить, что при этом состоянии воздуха и при отсутствии грозы вокруг облака *B* не может быть достаточного количества тепла, чтоб образовать таким путем лед, а также в находящейся внизу земле не может быть достаточно тепла, чтоб вызвать пары, которые поддерживали бы лед, поднимая и прогоняя к небу всю массу облака, которую он окружает. Из этого ясно, что свет солнца, которое, по моему предположению, стоит достаточно высоко на юге, падая на лед *DEFGHI* и отражаясь от него на белизну окружающего снега, должен заставить этот снег представиться тем, кто находится внизу, в виде большого, совершенно белого круга. Для этого достаточно даже, чтобы облако было круглым и немного более сжатым по окружности, чем посредине, а ледяное кольцо могло бы и не образоваться. Но если оно образовалось, то можно, находясь внизу в точке *K*, видеть до шести солнц, которые кажутся вставленными в белый круг, как шесть алмазов, вставленных в кольцо, а именно: первое — в *E*, от лучей, исходящих прямо от солнца, которое я полагаю в *A*; два следующих — в *D* и *F*, вызванных преломлением лучей, проходящих через лед в этих местах, где вследствие того, что толщина льда уменьшается, лучи преломляются внутрь, как при прохождении через стеклянную призму, о которой говорилось выше; поэтому края обоих этих солнц окрашены в красный цвет со стороны, обращенной к *E*, где лед толще, и в синий — с другой стороны, где он тоньше. Четвертое солнце появляется благодаря отражению в точке *H*, а два последних, также благодаря отражению,— в *G* и *I*; таким образом, я предполагаю, что можно описать круг с центром в *K* и проходящий через *B* в центре облака, так что углы *KGB* и *KBG* или *BGA* равны, как и углы *KIB* или *KBI* или *BIA*:

ибо вам известно, что отражение происходит всегда под равными углами, и что лед, являясь телом гладким, должен дать изображение солнца во всех тех местах, откуда его лучи могут отражаться к глазу. А так как лучи, непосредственно излученные, всегда ярче преломленных, а эти последние все же ярче отраженных, то солнце должно казаться более ярким в E (рис. 111), чем в D или в F, а здесь все же ярче, чем в G или H, или I, и эти три солнца G, H и I не должны иметь вокруг краев цветного ореола, какое имеют D и F, а должны быть только белыми. Если же зрители находятся не в K, а в каком-либо месте, более близком к B, так что круг, в центре которого помещаются их глаза и который проходит через B, не пересекает окружности облака, то они не смогут видеть двух солнц G и I, а увидят только четыре остальных; а если, наоборот, они отступят дальше к H или еще дальше к C, то они смогут видеть только пять солнц D, E, F, G и I; отступив еще дальше, они увидят лишь три солнца D, E, F, которые уже не будут находиться внутри белого круга, а будут как бы пересечены белой полосой. Далее, если солнце настолько низко над горизонтом, что не может освещать часть облака GHI, или же если облако еще не образовалось, то, очевидно, должны быть видны только три солнца D, E, F.

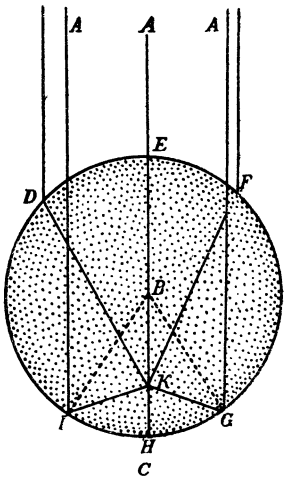


Рис. 111.

Однако до сих пор я рассматривал лишь плоскость этого облака, а надо изучить в нем еще целый ряд явлений, имеющих отношение к его профилю. Во-первых, хотя солнце не находится на прямой, идущей из E (рис. 112) в глаз K, тем не менее оно появляется именно там, в особенности, если

лед не простирается на слишком большую высоту или глубину; ибо в этом случае поверхность льда будет так искривлена, что в любом месте она почти всегда сможет отразить его лучи по направлению *K*. Если он имеет толщину, представленную фигурой, заключенной между линиями *123* и *456*, то очевидно, что лучи солнца, пройдя через него, смогут попасть в глаз *K* не только тогда, когда оно будет находиться на прямой *A2*, но и тогда, когда оно будет значительно ниже, например на прямой *S1*, или значительно выше, например на прямой *T3*, и поэтому всегда будет представляться так, как если бы оно находилось в *E*; ибо поскольку

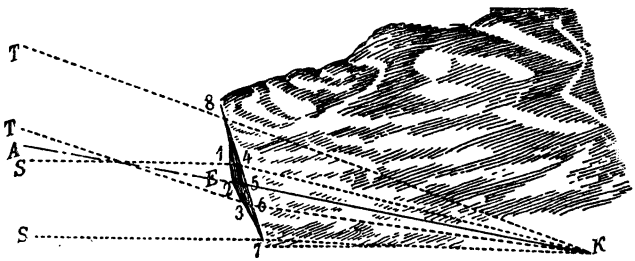


Рис. 112.

ледяное кольцо не предполагается широким, разница между прямыми *4K*, *5K* и *6K* незначительна. Заметьте, что вследствие этого солнце может быть видимо даже после того, как оно зашло, а тень солнечных часов может сместиться вперед или назад, и часы покажут не то время, какое есть на самом деле. Однако если солнце будет значительно ниже, чем это нужно, чтоб оно было видно в *E*, так что его лучи проходят также по прямой линии подо льдом в глаз *K*, как прямая *S7K*, которую я предполагаю параллельной *S1*, тогда, кроме шести предыдущих солнц, будет видно еще и седьмое под ними, которое, будучи более ярко, уничтожит тени, которые они могли бы произвести на часах. Тем не менее, если солнце так высоко, что его лучи могут пройти по прямой в *K* надо льдом, как *T8K*, которую я предполагаю параллельной *T3*, и если облако, расположенное на пути,

не столь плотно, чтоб этому препятствовать, то можно будет видеть седьмое солнце над шестью остальными. Если лед *123*, *456* (рис. 113) простирается дальше и вверх, и вниз, например до точек *8* и *7*, причем солнце находится в *A*, можно будет видеть в *E* три солнца одно над другим, а именно — в точках *8*, *5* и *7*; и далее, можно будет также видеть три солнца одно под другим в *D* (рис. 114) и три в *F*, так что может появиться до двенадцати солнц, вставленных в белый круг *DEFGHI*. А если солнце будет немного ниже, чем в *S*, или немного выше, чем в *T*, то могут еще появиться три солнца в *E*, именно два в белом круге, а третье — под ним или над ним;

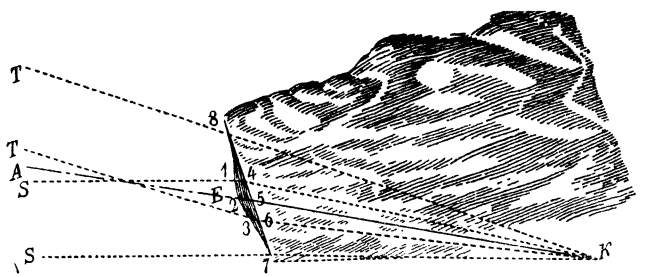


Рис. 113.

и затем может еще появиться два в *D* и два в *F*. Но мне не известно, чтобы когда-либо наблюдалось сразу так много солнц; если даже их наблюдалось три — одно над другим, как это случалось не раз, то обычно не замечалось еще солнца рядом с ними; если наблюдались три солнца рядом, что часто бывает, то для появления еще солнца над или под ними нужно, чтобы ширина льда между точками *7* и *8* не шла ни в какое сравнение с величиной всей окружности облака, так что глаз должен быть очень близко к точке *E*, когда эта ширина кажется ему достаточно большой, чтоб различить три солнца одно над другим; наоборот, он должен быть очень удален от этой точки, чтобы лучи, преломленные по направлению к *D* и к *F*, где толщина льда наименьшая, могли до него дойти.

Редко случается, чтобы облако было так велико, что можно было бы наблюдать более трех солнц одновременно. Однако говорят, что в 1625 г. польский король видел их до шести. И всего три года назад тюбингенский математик [54] видел четыре солнца, обозначенных здесь буквами D, E, F, H (рис.114); он даже особо отмечает в своей записке, что два солнца D и F были красными со стороны находящегося в середине солнца E, которое он называет истинным солнцем, и синими с другой стороны, и что четвертое H было очень бледно и мало заметно; этим подтверждается в большой степени то, что я сказал. Но самое прекрасное и замечательное зрелище, о каком мне пришлось слышать в этом отношении, было кольцо с пятью солнцами, которое появилось в Риме в году 1629, 20 марта, около двух или трех часов пополудни; чтоб вы могли убедиться в том, что оно соответствует моему изложению, я приведу описание в тех самых словах, в каких оно было тогда обнародовано.

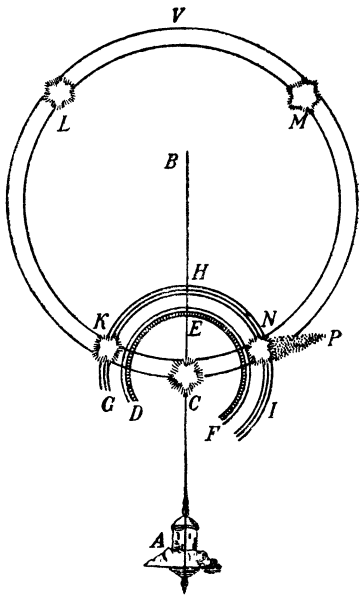


Рис. 114.

„A observator romanus. B vertex loco observatoris incumbens. C sol verus observatus. AB planum verticale, in quo et oculus observatoris et sol observatus existunt, in quo et vertex loci B jacet, ideoque omnia per lineam verticalem

„A — римский наблюдатель, B — зенит места наблюдения, C — наблюдаемое истинное солнце, AB — вертикальная плоскость (рис. 114), в которой находится глаз наблюдателя и истинное солнце и в которой лежит и зенит места наблю-

AB repraesentantur; in hanc enim totum planum verticale procumbit. Circa solem *C* apparuere duae incompletae irides eidem homocentricae, diversicolores, quarum minor sive interior *DEF* plenior et perfectior fuit, curta tamen sive aperta a *D* ad *F*, et in perpetuo conatu sese claudendi stabat, et quandoque claudebat, sed mox denuo aperiebat. Altera, sed debilis, semper et vix conspicabilis, fuit *GHI*, exterior et secundaria, variegata tamen et ipsa suis coloribus, sed admodum instabilis. Tertia et unicolor, eaque valde magna iris, fuit *KLMN*, tota alba quales saepe visuntur in paraselenis circa lunam: haec fuit arcus excentricus, integer ab initio, solis per medium incedens; circa finem tamen ab *M* versus *N* debilis et lacer, imo quasi nullus. Caeterum, in communibus circuli hujus intersectionibus cum iride exteriore *GHI*, emerserunt duo parhelia non usque adeo perfecta, *N* et *K*, quorum hoc debilius, illud autem fortius et luculentis splendescebat; amborum medius nitor aemulabatur solarem, sed latera colori-

дения; поэтому все изображается вертикальной линией *AB*, ибо через нее проходит всякая вертикальная плоскость. Вокруг солнца *C* появились две неполные радуги с общим центром, разноцветные, из которых меньшая, или внутренняя, *DEF* была ярче и совершеннее, однако она была отрезана или открыта от *D* к *F*; она как бы все время стремилась замкнуться, иногда замыкалась, но вскоре вновь открывалась; другая, *GHI*, более слабая и все время мало заметная, это внешняя, или вторая, радуга, отливающая цветами, но весьма неустойчивая. Третья радуга, *KLMN*, одноцветная, очень большая, была вся белая, как это часто наблюдается в параселенах вокруг луны. Это была эксцентрическая дуга, сначала сплошная, проходящая через центр солнца, около конца от *M* до *N* слабая и расплывчатая, почти незаметная. В точках пересечения этого круга с внешней радугой *GHI* выступили два паргелия, не совсем полных, *N* и *K*, из которых второй сиял слабее,

bus iridis pingebantur; neque rotundi ac praecisi, sed in inaequales et lacunosi, ipsorum ambitus cernebantur. *N*, inquietum spectrum, ejaculabatur caudam spissam subigneam *NOP*, cunjugi reciprocatione. *L* et *M* fuere trans zenith *B*, prioribus minus vivaces, sed rotundiores et albi, instar circuli sui cui inhaerebant, lac, seu argentum purum experimentes, quanquam *M* media tertia jam prope disparuerat; nec nisi exiqua sui vestigia subinde praebuit, quippe et circulus ex illa parte dedecerat. Sol *N* defecit ante solem *K*, illoque deficiente roboratur *K*, qui omnium ultimus disparuit, etc.".

а первый — сильнее и ярче. У обоих блеск средней части соперничал с солнечным, а края были окрашены в цвета радуги, контуры их не были круглыми и четко ограниченными, но были неровными, с пробелами. *N*, радужное сияние, выбросило из себя большой переливающийся огненный хвост *NOP*. *L* и *M* находились по ту сторону зенита *B*, менее яркие, чем предыдущие, но более круглые и белые, как кольцо, на котором они держались, наподобие молока или чистого серебра; хотя *M* уже исчез в середине 3-го часа, но иногда еще показывался в виде незначительных следов; большое кольцо также угасло в этой части. Солнце *N* погасло ранее солнца *K*, и с его ослаблением усиливалось *K*, которое исчезло последним из всех, и т. д.".

CKLMN (рис. 114) представляло собой белое кольцо, в котором было видно пять солнц; нужно себе представить, что, поскольку зритель находился в *A*, кольцо висело в воздухе над ним, так что точка *B* соответствовала макушке его головы, а два солнца — *L* и *M* — были у него за плечами, когда он был обращен к трем остальным — *K*, *C* и *N*; два из них — *K* и *N* — были окрашены по краям и не были ни столь круг-

лыми, ни столь яркими, как солнце, находившееся в C, следовательно, они были образованы преломленными лучами, тогда как два другие, L и M, были достаточно круглые, менее яркие и совершенно белые, без примеси каких-либо других цветов по краям; они были вызваны отраженными лучами. Многое могло служить препятствием появлению еще шестого солнца в V (рис. 115); наиболее правдоподобная причина заключается в том, что вследствие высоты облака глаз был так близок к V, что все лучи, достигающие льда, отражались далее точки A, и хотя точка B изображена здесь дальше от солнц L и M, чем от центра облака, но это не препятствует соблюдению правила, указанного мною выше относительно места, где они должны появиться. Наблюдатель, находясь ближе к дуге LVM, чем к другим частям кольца, должен был по сравнению с ней считать ее большей, чем она была на самом деле; кроме того, эти облака никогда не бывают совершенно круглыми, хотя и представляются глазу таковыми.

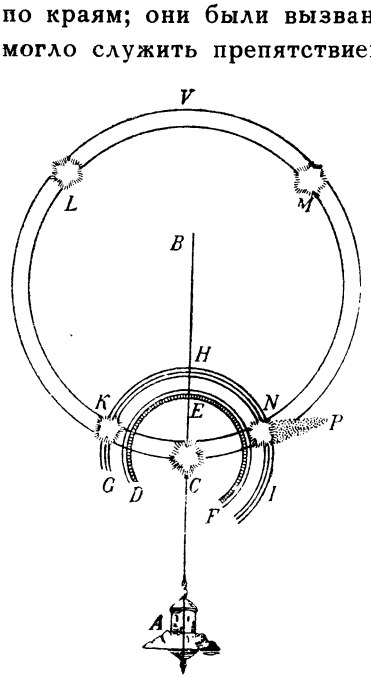


Рис. 115.

Отметим еще два примечательных обстоятельства. Первое то, что солнце N, находившееся на западе и имевшее изменчивую и неопределенную форму, отбрасывало от себя как бы большой огненный хвост NOP, представляющийся то длиннее, то короче. Это можно объяснить только тем, что изображенное в N солнце было искажено и неправильно, подобно тому, как это можно видеть, когда солнце отражается в слегка волнующейся воде или когда на него смотрят через

оконное стекло с неровными поверхностями. Вероятно, лед в этом месте имел неровную поверхность, поскольку уже начал таять. Это подтверждается и тем, что белое кольцо между M и N (рис. 116) было как бы разорвано и отсутствовало, а солнце N исчезло ранее солнца K, которое, казалось, становилось ярче, тогда как другое постепенно расплывалось.

Второе, что должно быть отмечено, это следующее: вокруг солнца C было два венца, окрашенных в те же цвета, что и радуга; внутренний венец DEF был гораздо ярче и светлее, чем внешний GHI, так что я нимало не сомневаюсь, что они были вызваны преломлением, подобно тому, как сказано мною ранее, но не в том непрерывном слое льда, где были видны солнца K и N, а в другом, разделенном на множество мелких частиц, находившемся над ним и под ним. Вполне правдоподобно, что та же причина, которая могла образовать целое ледяное кольцо из нескольких внешних частей облака, расположила и другие соседние так, что они вызвали эти венцы. Так что если эти венцы и не наблюдались всегда с появлением нескольких солнц, то это потому, что облако не всегда простирается по ту сторону окружающего его ледяного круга, или оно так непрозрачно и темно, что сквозь него нельзя видеть венцы. Эти венцы наблюдаются всегда вокруг истинного солнца и у них нет никакой связи с теми солнцами, которые являются лишь кажущимися; дей-

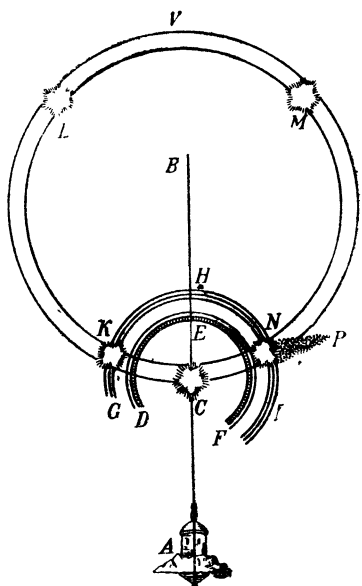


Рис. 116.

ствительно, хотя два солнца K и N встречаются здесь на пересечении внешнего венца и белого круга, но это дело чисто случайное, и я уверен, что явление не наблюдалось в местах, находившихся в некотором расстоянии от Рима, где оно было наблюдено.

Я не вывожу отсюда заключения, что центр венцов всегда лежит на прямой, проходящей из глаза к солнцу, с той же точностью, как центр радуги; ибо здесь разница в том, что водяные капли, будучи шарообразными, дают всегда одно и то же преломление, где бы они ни находились; тогда как ледяные частицы, будучи плоскими, дают тем большее преломление, чем под бо́льшим углом на них смотрят. Поскольку эти частицы образуются от вращения ветра вдоль окружности облака, они должны быть расположены здесь в ином направлении, чем когда они образуются над облаком или под ним, поэтому и может случиться, что наблюдаются два венца — один внутри другого, почти одинаковые по величине; центры этих венцов не вполне совпадают.

Далее, может случиться, что кроме ветров, окружающих это облако, дуют еще и иные, над ним или под ним; они впоследствии образуют там ледяные поверхности и таким образом являются причиной других разновидностей этого явления. Это может быть вызвано соседними облаками или дождем, если он там идет, так как лучи, отражаясь ото льда в одном из этих облаков по направлению к дождевым каплям, дадут в них части радуги, расположенные весьма различными способами; зрители, находящиеся не точно под таким облаком, а в стороне, между несколькими облаками, смогут увидеть другие кольца и другие солнца. Но мне кажется, что нет надобности вас этим дольше занимать; я надеюсь, что те, кто понял все сказанное в этом сочинении, не будут усматривать ничего непонятного в этих облаках: они будут в состоянии все понять и ничему не удивляться.

ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДУВЕДОМЛЕНИЕ

До сих пор я старался быть понятным для всех[1]. Однако я опасаюсь, что этот трактат сможет быть прочитан лишь теми, кому уже известно содержание книг по геометрии, ибо, поскольку в последних содержится ряд вполне доказанных истин, я счел излишним их повторять, хотя и пользовался ими.

Книга I

О ЗАДАЧАХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПОСТРОИТЬ, ПОЛЬЗУЯСЬ ТОЛЬКО КРУГАМИ И ПРЯМЫМИ ЛИНИЯМИ [2]

Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий [3].

Как исчисление арифметики относится к построениям геометрии

Подобно тому как вся арифметика заключается только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением [4], подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, — найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-либо другой линией,

а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень. С целью быть более понятным, я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию.

Умножение

Пусть, например, AB (рис. 117) является единицей, и требуется умножить BD на BC; для этого я должен только

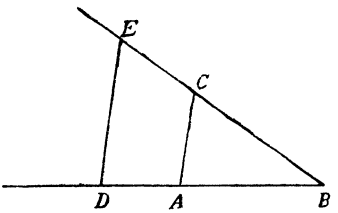


Рис. 117.

соединить точки A и C, затем провести DE параллельно CA, и BE будет результатом этого умножения.

Деление

Или же, если BE нужно разделить на BD, то, соединив точки E и D, я провожу AC параллельно DE, и BC будет результатом этого деления.

Извлечение квадратного корня

Или, если нужно извлечь квадратный корень из GH (рис. 118), то я прибавляю к GH, по продолжению, прямую FG, являю-

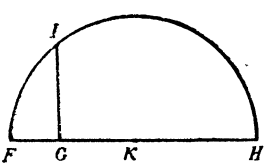


Рис. 118.

щуюся единицей, и, разделив FH в точке K на две равные части, описываю из центра K окружность FIH [5]; если затем

провести от точки G до точки I прямую, перпендикулярную к FH, то GI будет искомым корнем. Я здесь ничего не говорю ни о кубическом, ни о других корнях, так как мне будет удобнее рассмотреть их дальше.

Как можно употреблять буквенные обозначения [les chiffres] в геометрии

Но часто нет нужды проводить эти линии на бумаге, а достаточно их обозначить какими-нибудь буквами, каждую линию одной буквой[6]. Так, чтобы прибавить линию BD к GH, я называю одну из них a, а другую b и пишу $a+b$; и я пишу $a-b$ при вычитании b из a; и ab при их перемножении; и $\frac{a}{b}$ при делении a на b; и aa или a^2 при умножении a на самоё себя; и a^3 при умножении ее еще раз на a, и так до бесконечности; и $\sqrt{a^2+b^2}$ при извлечении квадратного корня из a^2+b^2; и $\sqrt{C\cdot a^3-b^3+abb}$ при извлечении кубического корня из a^3-b^3+abb, и т. д.[7].

При этом следует заметить, что под a^2 или b^3, или тому подобным я обыкновенно понимаю лишь сами простые линии, хотя, чтобы пользоваться наименованиями, употребительными в алгебре, я их называю квадратами или кубами, и т. д.

Следует также заметить, что если единица в рассматриваемом вопросе не определена, то все части одной и той же линии должны всегда[8] выражаться одним и тем же числом измерений[9]; так, например, здесь a^3 имеет столько же измерений, как и abb или b^3, из которых я составил линию, названную мною $\sqrt{C\cdot a^3-b^3+abb}$; но если единица определена, то дело обстоит иначе, ибо тогда повсюду, где имеется слишком много или слишком мало измерений, можно подразумевать единицу; так, если нужно извлечь кубический корень из $aabb-b$, то следует представлять себе, что величина[10] $aabb$ поделена один раз на единицу, а величина b два раза умножена на нее.

Между прочим, чтобы легче было вспомнить названия этих линий, всегда следует по мере их установления или же изменения составлять их отдельный список, записывая, например, так:

$AB=1$, т. е. AB равно 1,

$GH=a$,

$BD=b$, и т. д.[11].

Как следует получать уравнения, служащие для решения задач

Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва ее рассматривать как уже решенную и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим. И следует найти столько подобных уравнений, сколько было предположено неизвестных линий. Или же, если не удастся найти их столько и если, тем не менее, ничто не опущено из требуемого в вопросе, то это свидетельствует о том, что вопрос не вполне определен; в этом случае для всех неизвестных линий, которым не соответствуют никакие уравнения, можно взять произвольные известные линии. Если после этого их останется еще несколько, то чтобы выразить каждую из этих неизвестных линий, нужно по порядку воспользоваться каждым из оставшихся уравнений, либо рассматривать его отдельно, либо же сравнивать его с другими, и поступать

так, приводя[12] их до тех пор, пока не останется только одна из них, которая равна какой-нибудь другой известной или же у которой квадрат или куб, или квадрат квадрата, или сверхтело, или квадрат куба и так далее не окажется равным тому, что получится при сложении или вычитании двух или нескольких других величин, из которых одна является известной, а другие состоят из каких-либо средних пропорциональных между единицей и этим квадратом или кубом, или квадратом квадрата и т. д., умноженных на другие известные величины[13]. Я это записываю так:

$$z = b$$

или

$$z^2 = -az + bb,$$

или

$$z^3 = +az^2 + bbz - c^3,$$

или

$$z^4 = az^3 - c^3 z + d^4,$$

и т. д.[14], т. е. z, которую я считаю неизвестной величиной, равна b; или же квадрат z равен квадрату b минус величина a, умноженная на z; или же куб z равен величине a, умноженной на квадрат z плюс квадрат b, умноженный на z минус куб c; и так далее.

Если задача может быть построена при помощи кругов и прямых линий или же конических сечений, или даже с помощью какой-нибудь другой линии, не более, чем на одну или две степени[15] более сложной, то все неизвестные величины всегда могут быть таким путем сведены только к одной. Я, однако, не стану задерживаться и излагать это подробнее, ибо тогда я лишил бы вас удовольствия разобрать это самостоятельно, а также пользы, которую приобрел бы при этом упражнении ваш ум и которая, на мой взгляд, составляет основную выгоду, извлекаемую из этой науки. Кроме того, я не нахожу в этом вопросе таких затруднений, которых бы не мог преодолеть тот, кто хоть несколько све-

дущ в обычной геометрии и алгебре и кто внимательно познакомится со всем тем, что есть в этом сочинении.

Поэтому я ограничусь здесь предупреждением, что если только, приводя эти уравнения, вы не упустите случая воспользоваться всеми делениями, которые окажется возможным выполнить [16], то неизбежно получите наиболее простые выражения, к которым может быть приведен вопрос.

Каковы плоские задачи [17]

Если вопрос может быть решен средствами обыкновенной геометрии, т. е. при употреблении только прямых линий и окружностей, начерченных на плоской поверхности, то, когда будет вполне приведено последнее уравнение, в нем будет содержаться самое большее один неизвестный квадрат, приравненный к результату сложения или вычитания его корня, умноженного на какую-нибудь известную величину, и какой-нибудь другой, также известной величины.

Как они решаются

Тогда этот корень или неизвестную линию найти легко. Так, например, если я имею

$$z^2 = az + bb,$$

то я строю прямоугольный треугольник NLM (рис. 119), одна сторона которого LM равна b, квадратному корню из известной величины bb, а другая LN равна $\frac{1}{2}a$, половине другой известной величины, которая умножалась на z — линию, принятую мной за неизвестную. Если затем продолжить MN, основание [18] этого треугольника, до O так, чтобы NO было равно NL, то вся линия OM и будет искомой линией z. Выражается эта линия так:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}\ [19].$$

Если же я имею

$$yy = -ay + bb$$

и искомой величиной является y, то я строю тот же прямоугольный треугольник NLM и от его основания MN отнимаю

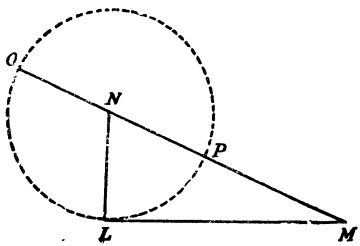


Рис. 119.

NP, равную NL; остаток PM и будет искомым корнем y. Таким образом, я имею

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

И точно так же, если бы я имел

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

то PM было бы x^2, и я получил бы

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}},$$

и так далее.

Наконец, если я имею

$$z^2 = az - bb,$$

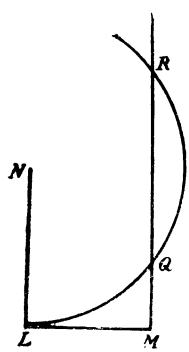


Рис. 120.

то я полагаю, как и раньше, NL (рис. 120) равной $\frac{1}{2}a$ и LM равной b; а затем, вместо того чтобы соединять точки M и N, я провожу MQR параллельно LN и из центра N описываю окружность, проходящую через L и пересекающую MQR

в точках Q и R. Искомой линией z будет MQ или же MR, так как в этом случае она выражается двояким образом, а именно

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

и

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$$

Если же окружность, имеющая центр в точке N и проходящая через точку L, не пересекает и не касается прямой MQR, то уравнение не имеет ни одного корня, так что можно утверждать, что построение предложенной задачи невозможно [20].

Впрочем, те же корни можно найти бесчисленным множеством других способов, и я хотел привести эти способы лишь ради их крайней простоты и с целью показать, что все задачи обыкновенной геометрии можно построить, не прибегая ни к чему сверх того немногого, что содержится в разъясненных мной четырех фигурах. Я полагаю, что древние не заметили этого, ибо в противном случае они не написали бы столько толстых книг, в которых уже одна только последовательность предложений показывает нам, что они не обладали истинным методом, который позволил бы найти их все, а лишь собрали им встретившиеся.

Пример из Паппа

Только что сказанное ясно видно и из того, что пишет в начале своей седьмой книги Папп [21]. Остановившись сперва несколько на перечислении всего того, что было написано по геометрии его предшественниками, Папп переходит под конец к одному вопросу, который, по его словам, не могли полностью решить ни Эвклид [22], ни Аполлоний [23], ни кто-либо другой. Вот его собственные слова.[1]

[1] Я привожу латинский перевод, а не греческий текст, чтобы каждый мог легче его понять.

„Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis quae Euclides scripsit, per ea tantum conica quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, etc.“.

„Однако вопрос о геометрическом месте к трем или четырем линиям, который, по словам Аполлония в его III книге [24], не был разрешен с достаточной полнотой Эвклидом, не смог быть разрешен до конца ни им самим, ни кем-либо другим. Не было даже ничего добавлено к тому, что написал об этом Эвклид,— по крайней мере, если говорить лишь об уже исследованных во времена Эвклида конических сечениях, и т. д.“.

И несколько дальше он поясняет, в чем состоит этот вопрос:

„At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat, et ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno et eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectae lineae ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquae: punctum contingit datum solidum locum,

„Вот каково то место к трем или четырем линиям, по поводу которого Аполлоний расточает себе великие похвалы, не обнаруживая никакой благодарности к своему предшественнику. Если даны по положению три прямые, и из одной и той же точки проведены под данным углом к этим трем прямым другие три прямые и если дано отношение прямоугольника, за-

hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantum, locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, et quae manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hae sunt:

ключенного двумя из проведенных прямых к квадрату третьей, то точка будет находиться на данном по положению телесном месте [25], т. е. на одном из трех конических сечений. Далее, если провести к четырем данным по положению прямым под данными углами четыре других прямых и если дано отношение прямоугольника на двух проведенных прямых к прямоугольнику на двух других, то точка также будет находиться на данном по положению коническом сечении. С другой стороны, если прямых будет только две, то установлено, что место будет плоским. В случае же, когда прямых больше четырех, точка будет находиться на месте, принадлежащем к числу до сих пор не известных, которые называют просто линиями и о природе или свойствах которых ничего не известно. Одну из этих линий, не первую, но которая представлялась наиболее очевидной, они построили и показали, что она приносит пользу [26]. Вот предложения, относящиеся к этим местам:

„Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, et data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, et data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus“.

„Если к пяти данным по положению прямым из какой-нибудь точки провести под данными углами другие прямые и если дано отношение прямоугольного параллелепипеда, заключенного тремя проведенными прямыми, к прямоугольному параллелепипеду, заключенному двумя другими и какой-либо данной, то точка будет находиться на данной по положению линии. Если данных прямых будет шесть и если будет дано отношение тела, заключенного тремя проведенными прямыми, к телу, заключенному тремя другими, то точка также будет находиться на данной по положению линии. Если же прямых больше шести, то уже нельзя говорить о данном отношении чего-либо, заключенного четырьмя прямыми, к тому, что заключено другими, потому что не существует ничего, что содержало бы больше, чем три измерения“.

Прошу вас попутно заметить, что боязнь древних употреблять в геометрии арифметические термины, которая могла быть вызвана лишь тем, что они не понимали достаточно ясно связи между этими науками, породила много

неясностей и неудобств в их способе изъясняться. Так, Папп продолжает следующим образом:

„Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt; neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones haec, et dicere, et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem; si vero octo, et reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter, quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum haec, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, etc.“.

„Однако незадолго до нас стали позволять себе выражаться подобным образом, не указывая, впрочем, при этом на что-либо сколько-нибудь вразумительное[27]. Но эти предложения можно и высказать и доказать общим образом посредством сложных отношений[28] следующим путем. Если к данным по положению прямым провести из какой-нибудь точки под данными углами другие и если дано отношение, составленное из отношения одной проведенной прямой к другой, отношения другой пары проведенных прямых, отношения третьей пары и, наконец, отношения последней проведенной прямой к данной прямой — если прямых всего семь — или же отношения двух последних прямых — если их восемь, — то точка будет находиться на данных по положению линиях. То же самое можно сказать при любом четном или нечетном числе прямых. Но, как я говорил, ни одно из мест,

следующих за местом к четырем прямым, еще не было установлено так, чтобы линия стала известной, и т. д.“.

Таким образом, вопрос, начало решению которого положил Эвклид, продолжение дал Аполлоний, но который не был решен до конца никем, заключался в следующем. Если имеются три, четыре или большее количество данных по положению прямых, то, во-первых, требуется найти такую точку, из которой можно провести к каждой из этих прямых по одной прямой, образующей с нею заданный угол, так, чтобы прямоугольник, построенный на двух проведенных из одной точки прямых, имел бы данное отношение к квадрату третьей, если прямых лишь три, а если их четыре, то он имел бы данное отношение к прямоугольнику на двух других; или же, если прямых пять, параллелепипед, составленный из трех прямых, имел бы данное отношение к параллелепипеду, составленному из двух других прямых и некоторой данной линии; или же, если их шесть, параллелепипед, составленный из трех прямых, имел бы данное отношение к параллелепипеду из трех других; или же, если их семь, то чтобы произведение четырех из них друг на друга[29] имело бы данное отношение к произведению трех других и еще некоторой данной линии; или же, если их восемь, то чтобы произведение четырех имело бы данное отношение к произведению четырех других. Таким образом, задача может быть распространена и на любое иное число линий. Затем, так как поставленным здесь условиям всегда может удовлетворять бесчисленное количество различных точек, требуется еще узнать и провести линию, на которой все они должны находиться. И Папп говорит, что если даны только три или четыре прямые, то такой линией является одно из трех конических сечений; но он не пытается ни определить, ни описать ее, ни также выяснить, каковы те линии, на которы-

должны находиться все эти точки, когда вопрос предложен в большем числе линий. Он только добавляет, что древние придумали одну такую линию, полезность которой при этом они показали, но ту, которая казалась наиболее очевидной и все же не была первой. Это дало мне повод испытать, нельзя ли посредством метода, которым я пользуюсь, пойти столь же далеко, как и древние [30].

Ответ на вопрос Паппа

В первую очередь я выяснил, что если вопрос предложен только в трех, четырех или пяти линиях, то искомые точки всегда можно найти при помощи простой геометрии, т. е. пользуясь только линейкой и циркулем и не делая ничего, кроме того, о чем уже говорилось; исключением является лишь случай с пятью данными линиями, когда все они параллельны. В этом случае, а также если вопрос предложен в шести или семи, или восьми, или девяти линиях, искомые точки всегда можно найти при помощи геометрии тел, т. е. посредством какого-нибудь из трех конических сечений; исключением является лишь случай с девятью данными линиями, когда все они параллельны. В этом случае, а также в случае четырнадцати, пятнадцати, шестнадцати и семнадцати линий нужно применить кривую, еще одной степенью [degré] более сложную, чем предыдущая, и т. д. до бесконечности.

Затем я установил также, что если имеются лишь три или четыре данные линии, то все искомые точки находятся иногда не только на каком-либо коническом сечении, но и на окружности круга или же прямой. Далее, если данных линий пять или шесть, или семь, или восемь, то все эти точки находятся на какой-либо из линий, одной степенью более сложной, чем конические сечения, и невозможно вообразить себе среди них такую, которая не могла бы принести пользу в этом вопросе; но опять-таки эти точки могут находиться

и на коническом сечении или на окружности или на прямой. Если же прямых девять, десять, одиннадцать или двенадцать, то эти точки находятся на линии, которая может быть лишь одной степенью более сложной, чем предыдущие; и все эти, одним порядком более сложные линии могут при этом пригодиться [31], и т. д. до бесконечности.

Наконец, первая и наиболее простая из всех после конических сечений линия — это линия, которая может быть описана пересечением параболы и прямой по способу, кото-

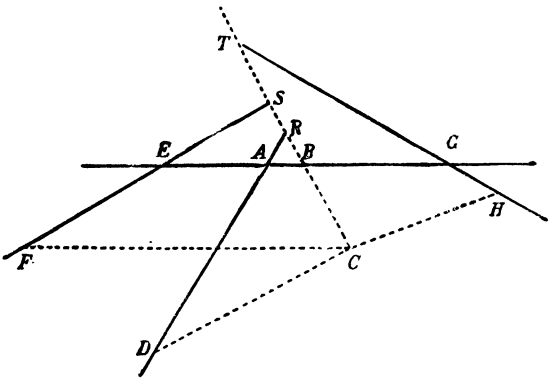


Рис. 121.

рый скоро будет разъяснен. Таким образом, я полагаю, что полностью удовлетворил тому, чего, по словам Паппа, искали здесь древние; и я попытаюсь изложить доказательство в немногих словах, ибо мне уже наскучило так много об этом писать.

Допустим, что AB, AD, EF, GH (рис. 121) и т. д. суть несколько данных по положению линий; требуется найти некоторую точку, например C, такую, что если провести от нее к данным прямым другие прямые, например CB, CD, CF и CH, образующие с ними данные углы CBA, CDA, CFE, CHG и т. д., то произведение одной части этих линий будет равно произведению других, или же они будут находиться между собой в каком-нибудь другом данном отношении,— это отнюдь не затрудняет вопроса [32].

Как нужно в этом примере установить члены, чтобы притти к уравнению

В первую очередь я предполагаю, что дело уже сделано, и чтобы избежать смешения всех этих линий, принимаю одну из данных и одну из искомых линий, например AB и CB (рис. 122), за главные, к которым я постараюсь также отнести все остальные. Обозначим отрезок линии AB, находящийся между точками A и B, через x, а BC через y. Затем продолжим все данные линии до пересечения с этими двумя, также продолженными, если это нужно и если они к ним не параллельны. Пусть, как вы здесь видите, они пересекают линию AB в точках A, E, G и BC в точках R, S, T. Далее, так как все углы треугольника ARB даны, то дано также отношение между сторонами AB и BR, которое я полагаю равным отношению z к b. Так как AB есть x, то RB будет $\frac{bx}{z}$ и вся CR будет $y+\frac{bx}{z}$, ибо точка B находится между C и R; если же R находилась бы между C и B, то CR была бы $y-\frac{bx}{z}$, и если бы C находилась между B и R, то CR была бы $-y+\frac{bx}{z}$. Три угла треугольника DRC также даны, а значит, дано и отношение между сторонами CR и CD, которое я полагаю равным отношению z к c; и так как CR есть $y+\frac{bx}{z}$, то CD будет $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Далее, так как линии AB, AD и EF даны по положению, то дано также и расстояние между точками A и E. Если назвать это расстояние k, то EB будет равно $k+x$, но она была бы $k-x$, если бы точка B находилась между E и A, и $-k+x$, если бы точка E лежала между A и B. Затем, так как даны все углы треугольника ESB, то дано также отношение BE к BS, которое я полагаю равным отношению z к d; так что BS есть $\frac{dk+dx}{z}$, и вся линия CS будет $\frac{zy+dk+dx}{z}$; но она была бы

$\frac{zy-dk-dx}{z}$, если бы точка S лежала между B и C и она была бы $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, если бы C лежала между B и S. Кроме того, даны три угла треугольника FSC и, следовательно, отношение CS к CF, которое положим равным отношению z к e; тогда вся линия CF будет $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Точно так же дана AG, которую я называю l; значит, BG будет $l-x$. Затем из треугольника BGT известно отношение BG

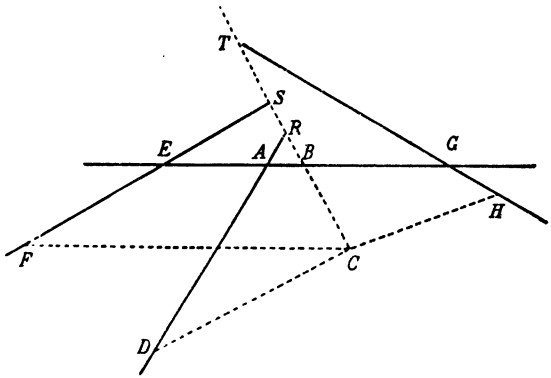


Рис. 122.

к BT, которое положим равным отношению z к f; значит BT будет $\frac{fl-fx}{z}$ и $CT=\frac{zy+fl-fx}{z}$. Затем, опять-таки благодаря треугольнику TCH, дано отношение TC к CH; положив его равным отношению z к g, мы получим, что

$$CH=\frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}.$$

Итак, вы видите, что каково бы ни было число данных по положению линий, каждая из линий, проведенных выше под данными углами из точки C, согласно условиям вопроса всегда может быть выражена при помощи трех членов. Один из них представляет собой неизвестную величину y, умноженную или деленную на какую-нибудь другую известную

величину; другой — неизвестную величину x, также умноженную или деленную на какую-нибудь другую известную величину, а третий — вполне известную величину. Исключение встретится только тогда, когда прямые параллельны либо линии AB, причем исчезает член, содержащий величину x, либо же линии CB, причем исчезает член, содержащий величину y. Это обстоятельство слишком очевидно для того, чтобы стоило задерживаться на его объяснении. Что касается знаков + и —, присоединяющихся к этим членам, то они могут варьировать всеми мыслимыми способами.

Далее вы видите также, что если перемножить некоторые из этих линий друг с другом, то встречающиеся в произведении величины x и y могут каждая обладать лишь таким числом измерений, сколько перемножалось линий, для выражения которых они служат. Таким образом, в произведении только двух линий они никогда не имеют больше двух измерений, в произведении трех линий — больше трех, и так далее, до бесконечности.

Как находят, что задача плоская, если она предложена не более чем в пяти линиях

Далее, так как для определения точки C требуется выполнение лишь одного условия, а именно того, что произведение некоторого числа этих линий должно быть равно или же (что отнюдь не сложнее) должно находиться в данном отношении к произведению других, то одну из неизвестных величин x или y можно выбрать произвольно, а другую найти из этого уравнения. При этом видно, что если вопрос предложен не более чем в пяти линиях, то величина x, которая не служит для выражения первой линии, всегда может иметь в уравнении не более чем два измерения. Так что если взять для y какую-нибудь известную величину, то останется только

$$xx = + \text{ или } -ax + \text{ или } -bb;$$

и, значит, величину x можно будет найти описанным выше образом при помощи циркуля и линейки. Придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек, вроде той, которая обозначена C: они опишут требуемую кривую линию.

Если вопрос предложен в шести или большем числе линий и если между данными имеются линии, параллельные BA или BC, то также может оказаться, что одна из двух величин x или y имеет в уравнении лишь два [33] измерения, и, значит, точку C можно найти при помощи линейки и циркуля. Но, наоборот, если все прямые параллельны, то даже когда вопрос предложен только в пяти линиях, найти таким образом точку C нельзя; вследствие того, что в этом случае величина x совсем не содержится в уравнении, уже нельзя вместо величины, названной y, взять известную величину, а нужно найти ее самоё. И поскольку она в этом случае будет иметь три измерения, то найти ее можно лишь, извлекши корень кубического уравнения, что, вообще говоря, невозможно выполнить, не прибегая к помощи по меньшей мере одного конического сечения. Далее, если дано до девяти линий, которые не все параллельны между собой, то всегда можно сделать так, чтобы уравнение восходило не выше квадрата квадрата. В этом случае его также всегда можно решить по способу, который я объясню в дальнейшем, при помощи конических сечений. Далее, если дано до тринадцати линий, то можно добиться того, чтобы уравнение восходило не выше квадрата куба, благодаря чему уравнение можно будет решать по способу, который я также изложу в дальнейшем, при помощи некоторой линии, лишь одной степенью более сложной, чем конические сечения. Вышеизложенное составляет первую часть того, что мне нужно здесь доказать. Прежде чем перейти ко второй части, я должен высказать некоторые общие соображения о природе кривых линий.

Книга II

О ПРИРОДЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Какие кривые линии могут быть допущены в геометрии

Древние хорошо заметили, что среди задач геометрии одни являются плоскими, другие телесными и третьи линейными: это значит, что одни из них можно построить, проводя лишь прямые линии и круги, тогда как другие требуют применения по меньшей мере какого-нибудь конического сечения и, наконец, третьи — какой-нибудь другой, более сложной линии. Однако меня удивляет, что вместе с тем древние не различали разных порядков этих более сложных линий, и я не могу понять, почему они называли их механическими, а не геометрическими. Действительно, если считать, что это было вызвано необходимостью употреблять при их проведении какие-нибудь машины, то в силу тех же соображений пришлось бы исключить круги и прямые, так как и их начертить на бумаге можно лишь при помощи циркуля и линейки, которые тоже можно назвать машинами. Точно так же это различие не могло быть вызвано и тем, что необходимые для их проведения инструменты более сложны, чем линейка и циркуль, и не могут быть столь же точными: на этом основании следовало бы скорее исключить их уже из механики, стремящейся к точности выполняемых рукою работ, чем из геометрии, преследующей лишь точность рассуждений, которая может быть, несомненно, столь же совершенна в случае этих линий, как и в случае других. Я бы не сказал также, что это вызывалось желанием древних не увеличивать числа своих постулатов и что они удовлетворились признанием своего права соединить две данные точки прямой линией и описать из данного центра окружность, проходящую через данную точку; ведь не постеснялись же они при изучении конических сечений допустить еще, кроме того,

что всякий данный конус можно пересечь данной плоскостью. Чтобы провести все кривые, которые я здесь намерен ввести, нужно только то предположение, что две или несколько линий можно перемещать друг вдоль друга и что их пересечения образуют другие линии; это предположение мне представляется ничуть не более трудным. Правда, древние не включали полностью в свою геометрию и конических сечений, и я не собираюсь изменять узаконенные обычаем названия; но мне кажется совершенно ясным, что если — как это и делают — почитать геометрическим то, что определенно [precis] и точно [exact], а механическим то, что не таково, и если рассматривать геометрию как науку, которая учит вообще познанию мер всех тел, то из нее так же мало следует исключать самые сложные, как и самые простые линии, если только можно представить себе, что эти линии описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру. Возможно, что допустить линии, более сложные, чем конические сечения, древним геометрам помешало то обстоятельство, что из этих кривых они в первую очередь случайно познакомились со спиралью, [34] квадратрисой [35] и им подобными. Эти кривые действительно принадлежат только механике и не относятся к тем, которые должны, на мой взгляд, быть здесь допущены, так как их представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить. И хотя они потом изучали конхоиду [36], циссоиду [37] и еще некоторые другие кривые, относящиеся к геометрии, но они не приняли их во внимание в большей мере, чем предыдущие, быть может, потому, что недостаточно полно исследовали их свойства. Возможно также, заметив, что они еще недостаточно знают о конических сечениях и что осталось еще много неизвестного даже из того, что можно получить

при помощи линейки и циркуля, они решили, что им не следует приступать к более трудному делу. Но так как я надеюсь, что впредь те, кто сумеет пользоваться предлагаемым здесь геометрическим исчислением, не найдут уже достаточным того, на чем можно было бы остановиться в области плоских и телесных задач, то считаю своевременным предложить им обратиться к другим изысканиям, которые всегда дадут им материал для упражнения [38].

Взгляните на линии AB, AD, AF (рис. 123) и им подобные, которые я предполагаю описанными при помощи инструмента

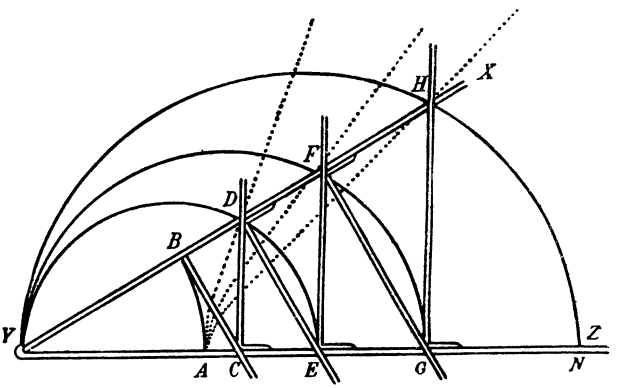


Рис. 123.

YZ [39], который составлен из нескольких линеек, соединенных таким образом, что, закрепив неподвижно на линии AN линейку, обозначенную YZ, можно растворять и складывать угол XYZ; при этом, когда угол сложен, точки B, C, D, F, G, H [40] — все собираются в точке A, но по мере того как угол растворяется, линейка BC, соединенная под прямым углом с XY в точке B, толкает по направлению к Z линейку CD, передвигающуюся вдоль YZ, образуя всегда с нею прямые углы; а CD толкает DE, передвигающуюся таким же образом вдоль YX и всегда параллельную BC; DE толкает EF; EF

толкает FG; последняя толкает GH, и можно вообразить себе бесчисленное количество других линеек, последовательно толкающих друг друга аналогичным образом, причем одни образуют всегда одинаковые углы с YX, а другие с YZ. По мере того как растворяется таким образом угол XYZ, точка B описывает линию AB, представляющую собою окружность, а точки D, F, H, в которых пересекаются другие линейки, описывают другие кривые линии — AD, AF, AH, из которых последние по порядку сложнее первой из них, а эта первая сложнее окружности. Но я не вижу ничего, что мешало бы составить столь же ясное и отчетливое понятие о способе описания первой кривой, как и о способе описания круга или, по крайней мере, конических сечений, а также ничего, что могло бы помешать понять вторую, третью и все остальные кривые, которые можно описать столь же хорошо, как и первую. Поэтому я не вижу, почему ими всеми нельзя было бы в равной мере пользоваться в геометрических рассуждениях [41].

Способ, при помощи которого можно распределить все кривые линии по определенным родам и узнать отношение, существующее между всеми их точками и точками прямых

Я мог бы привести здесь и другие способы проведения и представления кривых линий, возрастающих по степени сложности все более и более, до бесконечности. Но чтобы охватить совокупность всех встречающихся в природе кривых и распределить их по порядку по определенным родам, лучше всего указать на то обстоятельство, что все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии.

И если уравнение будет восходить лишь до прямоугольника двух неопределенных величин или же до квадрата одной из них, то кривая будет первого и самого простого рода, к какому принадлежат только круг, парабола, гипербола и эллипс. Но если уравнение будет восходить до трех или четырех измерений обеих или одной из двух неопределенных величин — ибо здесь для обнаружения отношения одной точки к другой необходимы две такие величины, — то кривая будет второго рода. И если уравнение будет восходить до пяти или шести измерений, то она будет третьего рода, и так далее для других кривых, до бесконечности [42].

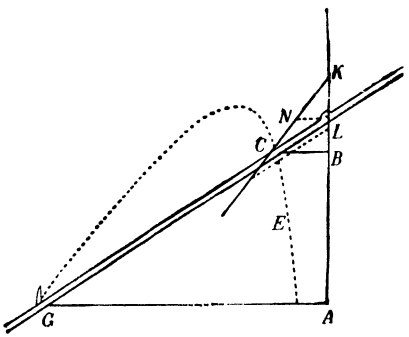


Рис. 124.

Например, я хочу узнать, какого рода линия EC (рис. 124), которую я представляю себе описанной пересечением линейки GL и прямолинейной плоской фигуры $CNKL$, сторона KN которой неопределенно продолжена по направлению к C и которая, передвигаясь по лежащей под ней плоскости вдоль прямой, т. е. так, что ее диаметр KL всегда оказывается приложенным к какому-либо участку линии BA, продолженной в обоих направлениях, заставляет вращаться эту линейку GL вокруг точки G, в силу того, что линейка соединена с фигурой таким образом, что постоянно проходит через точку L [43]. Я выбираю некоторую прямую, например AB, чтобы к различным ее точкам отнести все точки этой кривой EC, и выбираю на ней некоторую точку, допустим A, чтобы начать с нее вычисление. Я говорю, что выбираю и ту и другую, потому что их можно брать произвольным образом. Действительно, хотя и существует много способов сделать уравнение более коротким и удобным, но все же, какими бы

прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода; это легко доказать [44]. Выбрав затем на кривой произвольную точку, например C, к которой я предполагаю приложенным описывающий кривую инструмент, я провожу из точки C прямую CB, параллельную GA; и так как CB и BA суть две неопределенные и неизвестные величины, я называю одну из них y, а другую x. Но чтобы найти отношение одной из них к другой, я рассматриваю также известные величины, определяющие построение этой кривой, а именно GA, которую я называю a, KL, которую я называю b, и NL, параллельную GA, которую я называю c. Затем я говорю, что как NL относится к LK или c к b, так CB, или y, относится к BK, которая, следовательно, есть $\frac{b}{c}y$; а BL будет $\frac{b}{c}y-b$; и AL будет $x+\frac{b}{c}y-b$. Кроме того, как CB относятся к LB, или y к $\frac{b}{c}y-b$, так a, или GA, относится к LA, или $x+\frac{b}{c}y-b$. Таким образом, если перемножить вторую линию с третьей, то получится $\frac{ab}{c}y-ab$, что равно $xy+\frac{b}{c}yy-by$, получающемуся от перемножения первой линии с последней. Следовательно, искомое уравнение будет

$$yy=cy-\frac{c}{b}xy+ay-ac,$$

и из него видно, что линия EC — первого рода, и, действительно, она не что иное, как гипербола [45].

Если в описывающем кривую инструменте заменить прямую линию CNK этой гиперболой или какой-нибудь другой кривой первого рода, ограничивающей фигуру $CNKL$, то пересечение этой линии и линейки GL опишет вместо гиперболы EC другую кривую, которая будет второго рода. Так, если CNK будет кругом с центром L, то будет описана первая конхоида древних, а если это будет парабола с диаметром KB, то будет описана кривая, которая, как я говорил, является

первой и простейшей в вопросе Паппа, когда имеется всего лишь пять данных по положению прямых. Но если вместо одной из этих кривых первого рода, ограничивающая фигуру *CNKL* кривая будет второго рода, то при ее помощи будет описана кривая третьего рода, а если это будет кривая третьего рода, то будет описана кривая четвертого рода, и так далее до бесконечности, как это легко показать при помощи вычисления[46]. И если только кривая принадлежит к числу линий, называемых мною геометрическими, то каким бы другим способом ни вообразить себе ее описание, всегда можно будет найти уравнение, определяющее таким образом все ее точки.

Кроме того, кривые линии, для которых это уравнение восходит до квадрата квадрата, я отношу к тому же роду, что и линии, для которых оно восходит только до куба, а линии, уравнение которых восходит до квадрата куба,— к тому же роду, что и линии, для которых оно восходит только до сверхтела, и т. д. Причиной этого является то обстоятельство, что существует общее правило, позволяющее все затруднения, связанные с квадратом квадрата, приводить к кубу, а все затруднения, связанные с квадратом куба, к сверхтелу, так что эти первые не следует считать более сложными, чем последние.

Нужно, однако, заметить, что хотя линии каждого рода в большинстве своем одинаково сложны, так что они могут служить для определения одних и тех же точек и построения одних и тех же задач, но среди них все же имеются некоторые более простые линии, действие которых более ограничено. Так, например, к первому роду, помимо одинаково сложных эллипса, гиперболы и параболы, принадлежит и явно более простой круг. Среди кривых второго рода имеется обыкновенная конхоида, происходящая из круга, и еще некоторые другие кривые, которые хотя и не обладают такой силой, как большинство кривых их рода, но все же не могут быть отнесены к первому роду.

Продолжение выяснения вопроса Паппа, приведенного в предыдущей книге

Сведя таким образом все кривые линии к определенным родам, я теперь легко могу продолжить доказательство данного выше ответа на вопрос Паппа. Действительно, во-первых, я раньше показал, что в случае лишь трех или четырех данных прямых служащее для определения искомых точек уравнение восходит лишь до квадрата, а отсюда ясно, что кривая, на которой лежат эти точки, необходимо будет одной из кривых первого рода, ибо это самое уравнение выражает отношение всех точек линий первого рода к точкам прямой. И если дано не более восьми прямых, то уравнение восходит не выше квадрата квадрата, и, следовательно, искомая линия будет только второго или более низкого рода. И если дано не более двенадцати линий, то уравнение восходит лишь до квадрата куба, и, следовательно, искомая линия будет только третьего или более низкого рода и так далее. Затем, так как положение данных прямых может варьировать произвольным образом, вследствие чего в уравнении будут меняться всеми мыслимыми способами как известные величины, так и знаки + и —, то ясно, что нет такой кривой первого рода, которая не была бы полезна для этого вопроса, когда он предложен для четырех прямых; ни такой кривой второго рода, которая не была бы полезна, когда он предложен для восьми; ни третьего рода, когда он предложен для двенадцати, и т. д. Поэтому нет такой кривой, которая подпала бы под исчисление и могла быть допущена в геометрию и которая не оказалась бы полезной для случая некоторого числа линий.

Решение этого вопроса, когда он предложен лишь в трех или четырех линиях

Однако здесь мне необходимо заняться особо определением и изложением способа отыскания искомой линии, служащей для любого из случаев, когда дано лишь три или

четыре прямых. При этом заодно выяснится, что первый род кривых содержит только три конических сечения и круг.

Обратимся снова (рис. 125) к приведенным выше четырем линиям AB, AD, EF и GH, и пусть требуется найти другую линию, на которой находится бесчисленное количество точек, подобных точке C, такой, что если провести из нее к данным прямым под данными углами четыре линии CB, CD, CF и

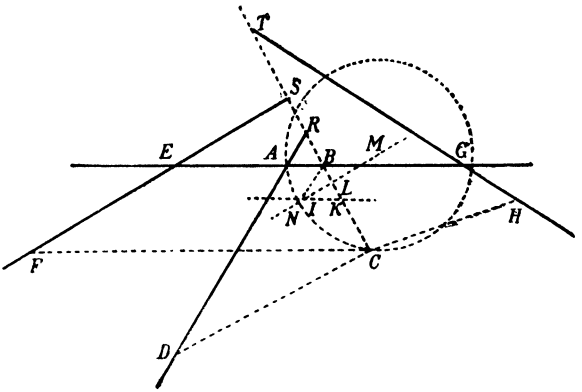


Рис. 125.

CH, то CB, умноженная на CF, даст выражение, равное CD, умноженной на CH, т. е. если положить

$$CB = y,\ CD = \frac{czy + bcx}{zz},\ CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz} \text{ и}$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz},$$

то уравнение будет

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix} -dekzz \\ +cfglz \end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{matrix}\right\} xy \begin{matrix} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{matrix}}{ezzz - cgzz} \quad [47],$$

по крайней мере, если предположить, что ez больше cg, ибо если бы оно было меньше, то нужно было бы переменить

все знаки + и —. Если бы величина y в этом уравнении оказалась нулем или меньше, чем ничто[48], при допущении, что точка C находится в углу DAG, то нужно было бы допустить еще, что точка C находится в углу DAE, или EAR, или RAG_1 и изменить в уравнении знаки + и —, как необходимо для этой цели. Если бы значение y оказалось нулем во всех этих четырех положениях, то в предложенном случае вопрос был бы невозможен. Мы здесь, однако, допустим, что он возможен. Вместо величины $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ будем для краткости писать $2m$, а вместо $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ будем писать $\frac{2n}{z}$ [49]. Тогда мы получим уравнение

$$yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$

корень которого есть

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

Будем, опять ради краткости,

вместо $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ писать o

и вместо $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ писать $[-]\frac{p}{m}$ [50].

Ибо, так как все эти величины даны, мы вправе называть их как угодно. Таким образом мы получим

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx},$$

и это должно представлять собой длину линии BC при неопределенной AB или x. Очевидно, что если вопрос предложен только в трех или четырех линиях, то всегда можно

получить такие члены, за исключением того, что некоторые из них могут отсутствовать и что знаки $+$ и $-$ могут варьировать по-разному.

Затем я провожу KI (рис. 126), равную и параллельную BA, так, чтобы она отсекла от BC часть BK, равную m, потому что у нас здесь имеется $+m$; я бы ее прибавил, проведя IK с другой стороны, если бы мы имели $-m$; и я совсем не проводил бы ее, если бы величина m была нулем. Затем я

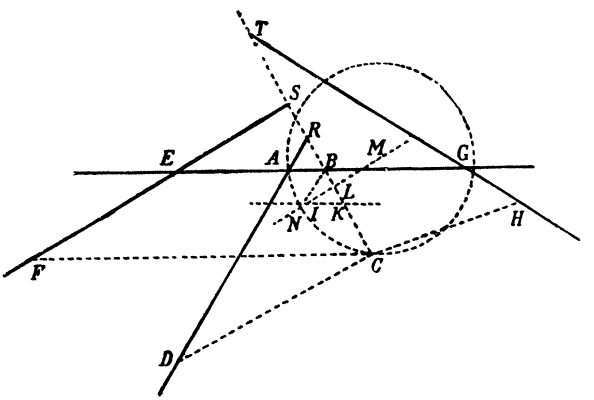


Рис. 126.

провожу еще IL так, чтобы линия IK относилась к KL, как z к n; и так как IK есть x, то KL будет $\frac{n}{z}x$. Тем самым я знаю также отношение KL к IL, которое полагаю равным отношению n к a; и так как KL есть $\frac{n}{z}x$, то IL будет $\frac{a}{z}x$. И я помещаю точку K между L и C, так как здесь у нас имеется $-\frac{n}{z}x$, но я поместил бы L между K и C, если бы имел $+\frac{n}{z}x$, и совсем не провел бы эту линию IL, если бы $\frac{n}{z}x$ было нулем.

Теперь в выражении для линии LC у меня остаются лишь следующие члены:

$$LC = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx} \quad [51];$$

отсюда я вижу, что если бы они отсутствовали, то точка C лежала бы на прямой IL; далее, если бы эти члены были таковы, что корень извлекался бы, т. е. если бы mm и $\frac{p}{m}xx$ отмечены были одним и тем же знаком $+$ [или $-$] [52] и oo было равно $4pm$, или же если бы члены mm и ox, или ox и $\frac{p}{m}xx$, были нулями, то точка C находилась бы на другой прямой, найти которую не труднее, чем IL [53]. Но если это не так, то точка C будет всегда лежать на одном из трех конических сечений или же на окружности; при этом один из диаметров лежит на линии IL, а линия LC является одной из ординат, сопряженных с этим диаметром, или же, наоборот, линия LC параллельна диаметру, относительно которого IL будет сопряженной ординатой [54]. Притом, если член $\frac{p}{m}xx$ отсутствует, то это коническое сечение представляет собой параболу; если он отмечен знаком $+$, то гиперболу, и, наконец, если он отмечен знаком $-$, то эллипс. Исключением будет лишь тот случай, когда величина aat равна pzz и угол ILC прямой, — тогда вместо эллипса получится круг. Если сечение окажется параболой, то ее прямая сторона [55] будет равна $\frac{oz}{a}$, а диаметр всегда будет лежать на линии IL. Чтобы найти точку N, являющуюся ее вершиной, нужно положить IN равным $\frac{amm}{oz}$ и поместить точку I между L и N, если члены будут $+mm + ox$, или же поместить точку L между I и N, если члены будут $+mm - ox$, или же N между I и L, если бы члены были $-mm + ox$; но $-mm$ никогда не может получиться при нашем способе подбора членов. И, наконец, точка N совпала бы с точкой I,

если бы величина mm была нулем. Теперь легко отыскать эту параболу на основании первой задачи первой книги Аполлония[56].

Если искомая линия есть окружность или эллипс или же гипербола, то в первую очередь нужно найти точку M, которая является ее центром и которая всегда лежит на прямой IL. Ее можно найти на этой прямой, положив IM равным $\frac{aom}{2pz}$, так что если величина o равна нулю, то центр находится как раз в точке I (рис. 127). Далее, если искомая линия есть окруж-

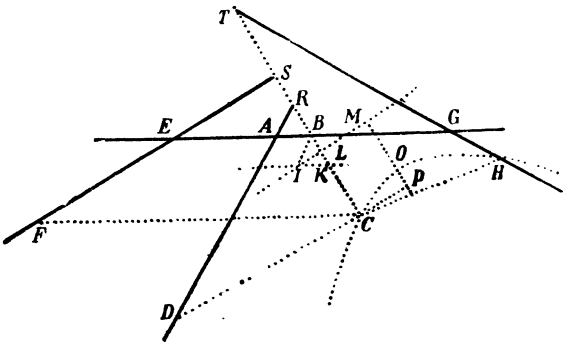


Рис. 127.

ность или эллипс и если мы будем иметь $+ox$, то точку M нужно брать с той стороны от точки I, с которой лежит точка L; если же мы будем иметь $-ox$, то ее нужно брать с другой стороны. Наоборот, в случае гиперболы, если мы будем иметь $-ox$, то центр M должен быть расположен со стороны точки L, а если $+ox$, то он должен быть расположен с другой стороны. Далее, прямая сторона фигуры должна быть $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, если мы имеем $+mm$ и искомая линия есть круг или эллипс, или же если мы имеем $-mm$ и искомая линия есть гипербола. И она должна быть $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, если в случае, когда искомая линия есть круг или эллипс

мы имеем $-mm$, или же в случае, когда она есть гипербола и величина oo больше $4mp$, мы имеем $+mm$. Затем, если величина mm есть нуль, то прямая сторона есть $\frac{oz}{a}$, а если ox есть нуль, то она есть $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Для определения поперечной стороны[57] нужно найти линию, относящуюся к прямой стороне, как aam к pzz, так что если прямая сторона есть

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}},$$

то поперечная сторона есть

$$\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Во всех этих случаях диаметр сечения будет находиться на линии IM, а LC есть одна из сопряженных с ним ординат. И если положить MN равной половине поперечной стороны и взять ее с той же стороны от точки M, что и точка L, то точка N будет вершиной этого диаметра. В результате будет легко отыскать это сечение на основании второй и третьей задач первой книги Аполлония.

Но если сечение есть гипербола и вместе с тем мы имеем $+mm$, а величина oo есть нуль или меньше $4pm$, то из центра M нужно провести линию MOP, параллельную LC, и линию CP, параллельную LM, и положить MO равной $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$ или же, если величина ox есть нуль, равной m. Точку O нужно рассматривать как вершину этой гиперболы, диаметром которой будет OP, а CP сопряженной с ним ординатой; ее прямая сторона есть $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{pp\,z^4}-\frac{a^4\,oom^3}{p^3\,z^4}}$, а поперечная сторона $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$, за исключением случая, когда ox есть нуль, ибо в этом случае прямая сторона есть

$\frac{2aa\,mm}{p\,zz}$, а поперечная $2m$. Теперь ее легко отыскать на основании третьей задачи первой книги Аполлония[58].

Доказательство всего только что изложенного

Доказательства всего этого очевидны. Действительно, составив площадь по величинам, найденным для прямой и поперечной сторон и для отрезка диаметра NL или OP, согласно теоремам 11, 12 и 13 первой книги Аполлония[59], мы найдем все те самые члены, которые составляют квадрат линии CP или CL — сопряженной с этим диаметром ординатой. (рис. 127). Так, например, в данном случае (рис. 128), отняв IM,

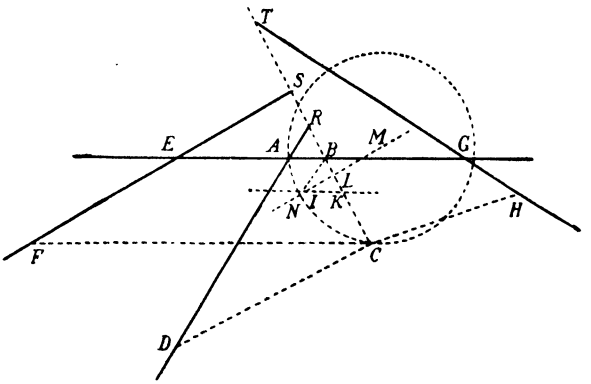


Рис. 128.

равную $\frac{aom}{2pz}$, от NM, равной $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$, я получу IN; прибавив к последней IL, равную $\frac{a}{z}x$, я получу NL, равную

$$\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}+\frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp};$$

если умножить это на $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$, т. е. на прямую сторону фигуры, то в прямоугольнике получится

$$x\sqrt{oo+4mp}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+\frac{moo}{2p}+2mm;$$

от этого нужно отнять площадь, относящуюся к квадрату NL, как прямая сторона к поперечной; квадрат же NL равен

$$\frac{aa}{zz}xx-\frac{aaom}{pzz}x+\frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp}+\frac{aaoom}{2ppzz}+$$
$$+\frac{aam^3}{pzz}-\frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}.$$

Это выражение нужно еще разделить на aam и умножить на pzz, ибо эти члены выражают отношение между поперечной стороной и прямой стороной, и тогда получится

$$\frac{p}{m}xx-ox+x\sqrt{oo+4mp}+\frac{oom}{2p}-\frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp}+mm,$$

что и нужно отнять от предыдущего прямоугольника. В результате для квадрата CL мы найдем $mm+ox-\frac{p}{m}xx$, и, значит, CL будет ординатой, сопряженной в эллипсе или в круге с отрезком диаметра NL.

Если желательно выразить все данные величины в числах (рис. 128), то мы положим, например, что $EA=3$, $AG=5$, $AB=BR$, $BS=\frac{1}{2}BE$, $GB=BT$, $CD=\frac{3}{2}CR$, $CF=2CS$, $CH=\frac{2}{3}CT$, и что угол ABR имеет 60 радиусов и, наконец, что прямоугольник из двух линий CB и CF равен прямоугольнику из двух других CD и CH; ибо все эти вещи необходимы для полной определенности вопроса. Положив вместе с тем $AB=x$ и $CB=y$, мы вышеописанным способом найдем:

$$yy=2y-xy+5x-xx$$

и

$$y=1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}xx}.$$

Поэтому BK должно быть 1, а KL половиной KI, и так как угол IKL или ABR имеет 60 градусов, а KIL, являющийся половиной KIB или IKL, 30 градусов, то угол ILK будет прямой. И так как IK или AB названа x, то KL будет $\frac{1}{2}x$; IL есть $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; величина, названная раньше z, будет 1; величина, названная a, будет $\sqrt{\frac{3}{4}}$; величина m будет 1, o будет 4 и величина p будет $\frac{3}{4}$. Следовательно, мы получим $\sqrt{\frac{16}{3}}$ для IM и $\sqrt{\frac{19}{3}}$ для NM; и так как aam, равная $\frac{3}{4}$, равна здесь pzz, а угол ILC прямой, то мы найдем, что кривая линия NC есть круг. Таким же образом легко исследовать все прочие случаи.

Каковы плоские и телесные места и способ их нахождения

Так как все уравнения, восходящие не выше квадрата, содержатся в только что изложенном, то тем самым здесь полностью решена не только поставленная древними задача о месте для трех и четырех линий, но и все, что относится к так называвшемуся древними синтезу [composition] телесных мест и, следовательно, также плоских мест, ибо они заключаются в телесных. Эти места получаются, когда требуется найти точку, для полного определения которой недостает одного условия, и когда, как в разобранном примере, в качестве искомой точки могут быть взяты все точки некоторой определенной линии. Если эта линия — прямая или окружность, то ее называют плоским местом; если же это парабола, гипербола или эллипс, то ее называют телесным местом. При этом всегда и при любых обстоятельствах можно притти к уравнению, содержащему две неизвестные величины и аналогичному какому-нибудь из только что мною решенных. Если линия, определяющая таким образом искомую точку,

одним порядком сложнее, чем конические сечения, то ее можно по аналогии назвать сверхтелесным местом, и так далее. Если же для определения точки недостает двух условий, то место, на котором она находится, будет поверхностью; эта поверхность может быть плоской, или шаровой, или же более сложной [60].

Но высшей целью древних в этом вопросе было получить построение телесных мест, и очевидно, что все, что написал Аполлоний о конических сечениях, было написано с намерением найти эти построения.

Кроме того, теперь видно, что к принятому мною за первый род у кривых линий не могут принадлежать никакие линии, кроме круга, параболы, гиперболы и эллипса, — это и составляет все, что я собирался доказать.

Какова первая и простейшая из всех кривых, служащих для решения вопроса древних, когда он предложен для пяти линий

Если вопрос древних предложен в пяти параллельных линиях, то, очевидно, искомая точка будет всегда находиться на прямой. Но если он предложен в пяти линиях, из которых четыре параллельны, а пятая пересекает их под прямыми углами, равно как и все линии, проведенные из искомой точки, также пересекают их под прямыми углами, и, наконец, если параллелепипед, составленный из трех линий, проведенных к трем параллельным линиям, равен параллелепипеду, составленному из двух линий, проведенных одна — к четвертой параллельной, а другая — к прямой, пересекающей параллельные линии под прямыми углами, и из третьей данной линии, — случай, на мой взгляд, простейший, какой только можно вообразить, после предыдущего, — то искомая точка находится на кривой, описываемой при движении параболы по вышеизложенному способу.

Положим, например, что данными линиями [61] будут AB, IH, ED, GF и GA (рис. 129) и что требуется найти точку C, обла-

дающую тем свойством, что если провести из нее под прямыми углами к данным линиям прямые CB, CF, CD, CH и CM, то параллелепипед из трех прямых CF, CD и CH будет равен параллелепипеду из двух других — CB и CM — и еще третьей, — допустим, AI. Я полагаю $CB = y$, $CM = x$, AI или AE, или $GE = a$, так что если точка C лежит между линиями AB и DE, то я получаю: $CF = 2a - y$, $CD = a - y$ и $CH = y + a$. Перемножив эти три выражения, я получаю $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, что равно произведению трех других линий, т. е. axy. После этого я рассматриваю кривую CEG, которую представляю себе описанной пересечением параболы CKN, перемещаемой так, что ее диаметр KL постоянно находится на прямой AB, и линейки GL, вращающейся тем временем вокруг точки G так, что она постоянно проходит в плоскости этой параболы через точку L. Я полагаю $KL = a$, а главную прямую сторону, т. е. ту, которая отнесена к оси этой параболы, также равной a, $GA = 2a$, CB или $MA = y$, CM или $AB = x$. Затем, в силу подобия треугольников GMC и CBL, GM, т. е. $2a - y$, относится к MC, т. е. x, как CB, т. е. y, к BL, которая, следовательно, будет $\frac{xy}{2a - y}$. И так как LK есть a, то BK будет $a - \frac{xy}{2a - y}$ или же $\frac{2aa - ay - xy}{2a - y}$. Наконец, так как тот же BK, будучи отрезком диаметра параболы, относится к сопряженной с ним ординате BC, как BC к пря-

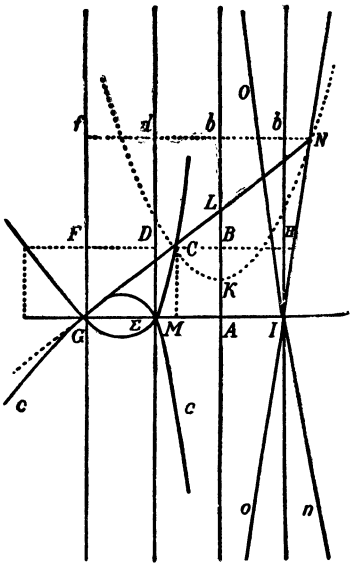


Рис. 129.

мой стороне, т. е. a, то вычисление показывает, что $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ равно axy и что, следовательно, C и есть искомая. Эта точка может быть взята в произвольном месте линии CEG или же на сопряженной с ней $cEGc$, описываемой таким же путем, с той лишь разницей, что вершина параболы обращена в другую сторону, или же она может лежать на противоположных им линиях NIo и nIO, описанных пересечением линии GL по другую сторону параболы KN.

Но и в случае, если данные параллельные прямые AB, IH, ED и GF не находятся на одинаковых расстояниях друг от друга и прямая GA, а также проведенные к ним из точки C линии пересекают их уже не под прямыми углами, эта точка C будет все же находиться на кривой той же природы. Даже когда среди данных линий нет параллельных, точка C может все-таки иногда находиться на такой кривой. Но если даны четыре паралелльные и пятая пересекающая их прямая и если параллелепипед из трех линий, проведенных из искомой точки — одна к этой пятой линии, а две других к двум параллельным, — равен параллелепипеду из двух линий, проведенных к двум другим параллельным, и из третьей данной линии, — то искомая точка будет находиться на кривой иной природы. Именно, эта кривая такова, что все прямые линии — ординаты, сопряженные с ее диаметром, равны ординатам какого-нибудь конического сечения, а отрезки этого диаметра между вершиной и ординатами находятся в том же отношении к некоторой данной линии, в каком эта данная линия находится к отрезкам диаметра конического сечения, в котором такие линии служат сопряженными ординатами. По правде говоря, я не могу сказать, что эта линия менее проста, чем предшествующая, но я все же нахожу, что предшествующую линию следует считать первой, так как ее описание и вычисление в некотором смысле легче [62].

Я не стану задерживаться на распределении линий, применимых в других случаях, по родам, ибо я не собирался

изложить здесь все; и показав способ нахождения бесконечного количества точек, через которые проходят линии, я полагаю, что вместе с тем дал средства, достаточные для их описания.

Какие из кривых, которые описывают, находя ряд их точек, могут быть допущены в геометрии

Следует, кстати, заметить, что существует большое различие между этим способом нахождения ряда точек для проведения кривой и тем способом, которым пользуются в случае спирали и подобных ей кривых. При помощи последнего способа находят не все без различия точки искомой кривой, а только те, которые могут быть определены какой-либо более простой мерой, чем та, которая требуется для получения всей линии; при этом, собственно говоря, не находят ни одной из точек линии, т. е. ни одной из точек, настолько для нее специфических, что их нельзя найти иначе, как через нее. Между тем линии, применяемые в предложенном вопросе, не имеют ни одной такой точки, которая не могла бы быть определена по только что изложенному способу. И хотя этот способ нахождения искомой кривой линии посредством отыскания нескольких, безразлично каких, ее точек распространяется только на те линии, которые могут быть описаны также правильным и непрерывным движением, его все же не следует целиком исключить из геометрии [63].

Какие из кривых, которые описывают с помощью веревки, могут быть допущены в геометрии

Из геометрии не следует исключать и тот способ, при котором пользуются нитью или изогнутой веревкой для определения равенства или разности [64] двух или нескольких прямых, которые можно провести под какими-нибудь углами из любой точки искомой кривой к каким-нибудь другим точ-

кам или линиям, как мы это сделали в „Диоптрике“ для объяснения эллипса и гиперболы. Правда, в геометрии нельзя принять никаких линий, подобных веревкам, т. е. становящихся то прямыми, то кривыми, ибо отношение между прямыми и кривыми неизвестно и, даже, думаю, не может быть познано людьми, и поэтому отсюда нельзя было бы вывести ничего точного и надежного [65]. Но так как в этих построениях веревкой пользуются только для определения прямых, длины которых вполне известны, это не должно вести к их исключению.

Для разыскания всех свойств кривых достаточно знать отношение всех их точек к точкам прямых и способ проведения других линий, пересекающих кривые во всех этих точках под прямыми углами

Из одного того, что на основании изложенного выше способа известно отношение всех точек кривой линии ко всем точкам некоторой прямой, легко также найти их отношение ко всем другим данным точкам и линиям и, следовательно, определить диаметры, оси, центры и другие линии и точки, к которым каждая кривая находится в более специальном или более простом отношении, чем к другим линиям и точкам; и таким образом придумать различные способы их описания и выбрать среди них наиболее легкие. Основываясь только на этом, можно даже найти почти все из того, что может быть определено относительно величины заключенного ими пространства; мне нет надобности пояснять это более подробно [66]. Наконец, все прочие свойства, какие только могут быть приписаны кривым линиям, зависят лишь от величины углов, образуемых ими с некоторыми другими линиями. Но если можно провести прямые, пересекающие их под прямыми углами, или — что для меня здесь одно и то же — прямые, пересекающие касательные [les contingentes] к ним в точках их встречи с другими кривыми, с которыми они

образуют подлежащие измерению углы, то величину этих углов не труднее отыскать, чем в случае, если бы эти углы заключались между двумя прямыми. Поэтому я думаю, что приведу здесь все, что требуется из начал учения о кривых, когда дам общий способ проведения прямых, пересекающих под прямыми углами кривые линии в любых точках. И я смею сказать, что эта задача является наиболее полезной и общей не только среди известных мне, но также среди всех тех задач, которые я когда-либо желал знать в геометрии.

Общий способ нахождения прямых линий, пересекающих данные кривые или же их касательные под прямыми углами

Допустим, что CE — кривая линия (рис. 130) и что требуется через точку C провести прямую, образующую с ней прямые углы [67]. Я предполагаю, что это уже сделано и что искомая линия есть CP. Я продолжаю ее до точки P, где она встречает прямую GA, которую я считаю той прямой, к точкам которой относят все точки линии CE; так что, положив MA или $CB = y$ и CM или $BA = x$, я имею некоторое уравнение, выражающее отношение между x и y. Далее я полагаю $PC = s$ и $PA = v$, или $PM = v - y$; затем из прямоугольного треугольника PMC я имею, что ss, квадрат основания, равен $xx + vv - 2vy + yy$ — квадратам двух сторон, т. е. я имею, что

$$x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy} \text{ или же } y = v + \sqrt{ss - xx}.$$

Пользуясь этим уравнением, я удаляю из уравнения, выражающего для меня отношение всех точек кривой CE к точкам прямой GA, одну из двух неопределенных величин x или y. Это легко сделать, если я желаю удалить x, поставив повсюду $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ вместо x, квадрат этого выра-

жения вместо xx, его куб вместо x^3 и так далее, и если я желаю удалить y, то поставив вместо него $v+\sqrt{ss-xx}$ и квадрат или куб этого выражения вместо yy или y^3 и т. д. Таким образом всегда получается уравнение, в котором имеется только одна неопределенная величина x или y.

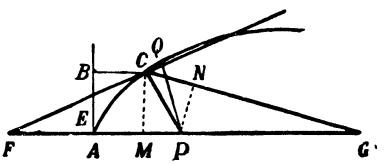


Рис. 130.

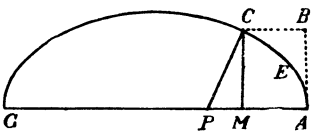


Рис. 131.

Например (рис. 131), если CE есть эллипс, MA — отрезок его диаметра, для которого CM является сопряженной ординатой, r — его прямая сторона и q поперечная, то, согласно теореме 13 первой книги Аполлония, имеем: $xx=ry-\frac{r}{q}yy$. Если отсюда удалить xx, то останется:

$$ss-vv+2vy-yy=ry-\frac{r}{q}yy,$$

или же

$$yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r} \text{ равно ничему,}$$

ибо здесь лучше рассматривать все выражения вместе, чем приравнивать одну его часть другой.

Точно так же если CE есть кривая, описываемая при движении параболы по вышеизложенному способу, и если положить b вместо GA, c вместо KL и d вместо прямой стороны, соответствующей диаметру параболы KL (рис. 132), то уравнение, выражающее отношение между x и y, будет:

$$y^3-byy-cdy+bcd+dxy=0.$$

Удаляя отсюда x, мы получим:

$$y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy},$$

и, располагая по порядку эти члены посредством умножения:

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ + bb \\ + dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ + ccdd \\ - ddss \\ + ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + \\ + bbccdd = 0$$

и так далее.

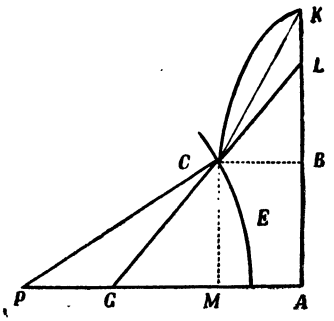


Рис. 132.

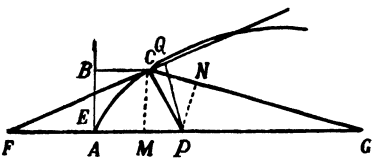


Рис. 133.

Даже тогда, когда точки кривой линии относятся к точкам некоторой прямой не по способу, указанному мною, но по любому другому способу, какой только можно вообразить, можно, тем не менее, всегда получить подобное уравнение. Допустим, например, что CE (рис. 133) представляет собой линию, отношение [rapport] которой к трем точкам F, G и A таково, что прямые, проведенные из каждой ее точки, вроде C, к точке F, превосходят линию FA на величину, находящуюся в некотором данном отношении (proportion) к другой величине, на которую GA превосходит линии, проведенные из тех же точек до G [68]. Положим $GA = b$, $AF = c$ и, выбрав на кривой произвольную точку C, допустим, что величина,

на которую CF превосходит FA, относится к величине, на которую GA превосходит GC, как d к e. Тогда, если эта неопределенная величина названа z, FC будет $c+z$, а GC будет $b-\frac{e}{d}z$. Далее, если положить $MA=y$, то GM будет $b-y$, а FM будет $c+y$. Так как треугольник CMG прямоугольный, то, отнимая квадрат GM от квадрата GC, мы получим квадрат CM, который будет

$$\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+2by-yy.$$

Затем, отнимая квадрат FM от квадрата FC, мы получим еще квадрат CM, выраженный через другие члены, именно

$$zz+2cz-2cy-yy;$$

и так как эти члены равны предыдущим, то они позволят узнать y или MA, которая будет

$$\frac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}.$$

Подставляя это выражение вместо y в квадрат CM, мы найдем, что он выражается через следующие члены:

$$\frac{bddzz+ceezz+2bcddz-2bc\,dez}{bdd+cdd}-yy.$$

Далее, если допустить, что прямая PC пересекает кривую в точке C под прямым углом, и положить, как и ранее, $PC=s$ и $PA=v$, то PM будет $v-y$; и так как треугольник PCM прямоугольный, то для квадрата CM мы будем иметь $ss-vv+2vy-yy$. Отсюда, вновь подставляя вместо y равное ему выражение, мы получим в качестве искомого уравнения:

$$zz+\frac{2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}=0.$$

Найдя такое уравнение, мы, вместо того чтобы воспользоваться им для нахождения величин x или y или z, уже известных нам, поскольку известна точка C, применим его к отысканию v или s, определяющих искомую точку P. Для этого нужно принять во внимание, что если точка P такова, как этого желают, то окружность, для которой она является центром и которая проходит через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее; но если эта точка P будет хоть немного ближе или же дальше от точки A, чем следует, то эта окружность пересечет кривую не только в точке C, но обязательно еще в какой-нибудь другой (рис. 134). Далее нужно также иметь в виду, что когда эта окружность пересекает кривую CE, то уравнение, с помощью которого ищут величину x или y, или другую, им подобную, допуская, что PA и PC известны, обязательно имеет два неравных корня. Так, например, если эта окружность пересекает кривую в точках C и E и если провести EQ параллельно CM, то названия неопределенных величин x и y будут столь же пригодны для линий EQ и QA, как и для CM и MA. Далее, в силу свойств круга, PE равно PC, так что если мы будем искать линии EQ и QA через PE и PA, которые предположим данными, то получим то же уравнение, которое получили бы, если бы искали CM и MA через PC и PA. Из этого, очевидно, вытекает, что значение x или y, или другой подобной величины, принятой нами, будет в этом уравнении двояким, т. е. будут иметься два неравных между собой корня, из которых один будет CM, а другой EQ, если мы ищем x, или же один будет MA, а другой QA, если мы ищем y, и т. д. Правда, если точка E расположена не на той же стороне кривой, что и C, то из двух корней лишь один будет истинным, другой же будет обратным [69] или меньшим,

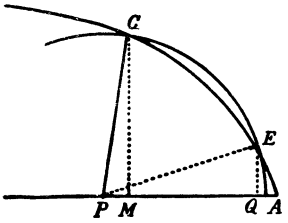


Рис. 134.

чем ничто; но чем ближе эти две точки C и E друг к другу, тем меньше разность между этими двумя корнями, и они, наконец, совершенно равны, если обе точки совпадают в одну, т. е. если круг, проходящий через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее.

Кроме того, следует принять во внимание, что когда в уравнении есть два равных корня, оно обязательно имеет такой же вид, как если бы была умножена сама на себя величина, предполагаемая неизвестной, минус равная ей известная величина. Если при этом последнее выражение не будет иметь того же числа измерений, как предыдущее, то его умножают на другое выражение, имеющее недостающее ему число измерений; так что между каждым из членов одного выражения и каждым из членов другого можно будет получить свое особое уравнение.

Например, я утверждаю, что первое найденное выше уравнение, именно

$$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r},$$

должно иметь тот же вид, какой получается, если принять e равным y и умножить $y - e$ на самое себя, что дает

$$yy - 2ey + ee.$$

Вследствие этого теперь можно сравнить между собой каждый из их членов в отдельности и сказать, что так как первый из них, yy, одинаков и в том и в другом уравнении, то второй член, который в одном из них есть $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, равен второму в другом, который есть $-2ey$.
Если ищут величину v, представляющую собой величину линии PA (рис. 135), то отсюда имеют

$$v = e - \frac{r}{y}e + \frac{1}{2}r$$

или же, поскольку мы приняли, что e равно y,

$$v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r.$$

И таким же образом можно было бы найти при помощи третьего члена

$$ee = \frac{qvv - qss}{q - r},$$

но так как величина v достаточно определяет точку P, которую мы только и ищем, то нет нужды итти дальше.

Точно так же второе найденное выше выражение, именно

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ + bb \\ + dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} + 4bcd \\ - ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ + ccdd \\ - ddss \\ + ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

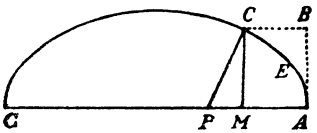


Рис. 135.

должно иметь тот же вид, что и сумма, получающаяся при умножении $yy - 2ey + ee$ на $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, т. е.

$$y^6 \left.\begin{matrix} + f \\ - 2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} + gg \\ - 2ef \\ + ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} + h^3 \\ - 2egg \\ + eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} + k^4 \\ - 2eh^3 \\ + eegg \end{matrix}\right\} yy \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ + eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4.$$

Из этих двух уравнений я получаю, таким образом, шесть других, служащих для нахождения шести величин — f, g, h, k, v и s. Из этого легко усмотреть, что какого бы рода ни

была предложенная кривая, по указанному способу всегда получается столько уравнений, сколько должны мы принять неизвестных величин. Но для того чтобы распутать по порядку эти уравнения и, наконец, найти величину v, которая только и нужна и в связи с которой ищутся другие величины, необходимо в первую очередь при помощи второго члена найти f — первую из неизвестных величин последнего выражения. Мы найдем, что

$$f = 2e - 2b.$$

Затем при помощи последнего члена следует найти k — последнюю из неизвестных величин того же выражения. Мы найдем, что

$$k^4 = \frac{bbccdd}{ee}.$$

После этого при помощи третьего члена следует найти вторую величину g, причем получится, что

$$gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd.$$

Затем при помощи предпоследнего члена следует найти предпоследнюю величину h, которая такова, что

$$h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}.$$

Если бы в этом выражении имелись еще такие величины, то нужно было бы, следуя тому же порядку, так же продолжать вплоть до последней, ибо это всегда можно сделать тем же самым образом.

Далее, при помощи следующего в том же порядке члена, в данном случае являющегося четвертым, нужно найти величину v, причем получится

$$v = \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

Заменяя здесь e через равную ей величину y, мы получим для линии AP, что

$$v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}.$$

Подобным же образом третье уравнение

$$zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv},$$

если принять f равной z, имеет такой же вид, как и

$$zz - 2fz + ff.$$

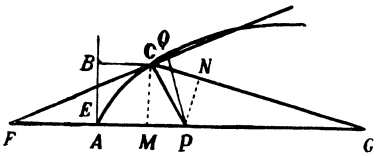


Рис. 136.

Поэтому опять-таки получится уравнение между $-2f$ или $-2z$ и

$$\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv},$$

откуда мы найдем, что величина v есть

$$\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}.$$

Поэтому если составить линию AP (рис. 136) по этому выражению, которое равно v и все величины которого известны, и провести из найденной таким образом точки P прямую к точке C, то эта прямая пересечет в ней кривую CE под прямыми углами, а это и требовалось сделать. И я не вижу ничего, что могло бы помешать распространить таким же образом эту задачу на все кривые линии, которые подпадают под какое-нибудь геометрическое исчисление.

Следует даже заметить относительно последнего выражения, произвольно выбираемого для дополнения числа изме-

рений другого выражения, когда число его измерений недостаточно, например относительно взятого выше

$$y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4,$$

что знаки + и — в нем можно брать произвольно, причем линия AP или v от этого не изменится: в этом вы можете легко убедиться на опыте сами; я же был бы принужден написать значительно больший том, чем желаю, если бы стал останавливаться на доказательстве всех упомянутых мною теорем. Мне все же хочется попутно сообщить вам, что идея введения двух одинакового вида уравнений с целью сравнить все члены одного с соответствующими членами другого и таким образом породить несколько уравнений из одного, — пример чего вы здесь видели, — может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и является не из последних в применяемом мною методе.

Я не стану проводить построений, позволяющих на основе изложенных вычислений провести искомые касательные или перпендикуляры. Ибо их всегда нетрудно найти, хотя нередко требуется известное искусство, чтобы сделать эти построения короткими и простыми.

Пример построения этой задачи для конхоиды

Так, например, если DC — первая конхоида древних (рис. 137), A — ее полюс, а BH — линейка, так что все прямые, направленные к A и заключающиеся между кривой CD и прямой BH, вроде DB и CE, равны, и если требуется найти линию CG, пересекающую кривую в точке C под прямыми углами, то для нахождения, по изложенному здесь методу, той точки линии BH, через которую должна пройти линия CG, пришлось бы заняться вычислениями столь же или даже более длинными, чем предшествующие. А между тем построение, которое затем следовало бы извлечь из этих вычислений, очень просто. Нужно лишь на прямой CA взять CF, равную

CH — перпендикуляру к HB, — затем через точку F провести FG, параллельную BA и равную EA; таким образом,

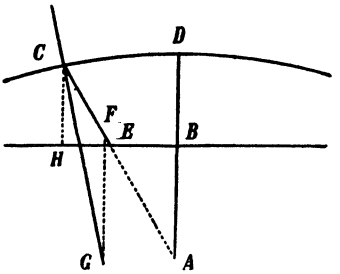


Рис. 137.

получится точка G, через которую должна проходить искомая линия CG[70].

Исследование четырех новых родов овалов, употребляющихся в оптике

В заключение, для того чтобы вы знали, что предложенное здесь рассмотрение кривых линий небесполезно и что эти линии обладают рядом свойств, ничуть не уступающих

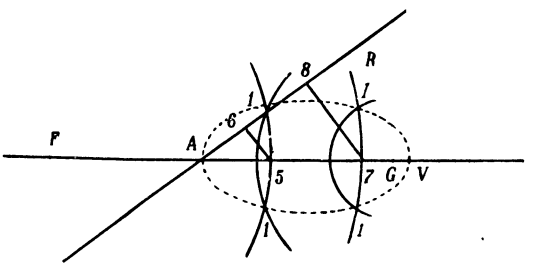


Рис. 138.

свойствам конических сечений, я прибавлю еще здесь исследование определенных овалов, которые, как вы увидите, очень полезны в теории катоптрики и диоптрики[71]. Вот способы, которыми я их описываю.

В первую очередь (рис. 138), проведя прямые FA и AR, пересекающиеся в точке A безразлично под какими углами, я на одной из них беру произвольную точку F; при этом я возьму ее дальше от точки A или ближе к ней, в зависимости от того, хочу ли я получить эти овалы бо́льшими или меньшими. Из точки F, как из центра, я описываю окружность, проходящую несколько дальше точки A, например через точку 5. Затем из точки 5 я провожу прямую $5\,6$, пересекающую другую прямую в точке 6 так, чтобы $A6$ была меньше $A5$ в некотором любом данном отношении, и если желательно пользоваться этими кривыми в диоптрике, то именно в том отношении, которое измеряет преломление. Затем на линии FA, с той стороны, где находится точка 5, я беру произвольным образом еще точку G, т. е. так, чтобы линии AF и GA находились в любом данном отношении. Затем на линии $A6$ я беру RA, равную GA, и из центра G описываю окружность радиусом, равным $R6$; эта окружность пересекает другую окружность с обеих сторон в точке 1, являющейся одной из тех точек, через которые должен проходить первый из искомых овалов. Далее, я снова описываю из центра F окружность, проходящую вблизи точки 5 по ту или другую ее сторону, например через точку 7, и, проведя прямую $7\,8$ параллельно $5\,6$, из центра G описываю другую окружность радиусом, равным $R\,8$. Эта окружность пересекает окружность, проходящую через точку 7, в точке 1, опять-таки принадлежащей к числу точек того же овала. И так можно найти сколько угодно других точек, снова проводя другие параллельные $7\,8$ линии и другие окружности с центрами F и G[72].

Второй овал (рис. 139) отличается лиш тем, что вместо AR нужно, по другую сторону от точки A, взять AS, равную AG, и что радиус окружности, описываемой из центра G, для пересечения окружности, описываемой из центра F и проходящей через точку 5, берется равным линии $S6$ или же — в случае пересечения окружности, проходящей через точку

7, — равным *S8*, и так далее. В результате эти окружности будут пересекаться в точках, помеченных *2*, *2* и принадлежащих второму овалу *A2X*.

Для третьего и четвертого овалов (рис. 140) вместо линии *AG* следует взять линию *AH*, находящуюся по другую сторону от точки *A*, именно по ту сторону, на которой находится точка *F*.

Кроме того, следует заметить, что при описании всех этих овалов эта линия *AH* должна быть больше, чем линия *AF*.

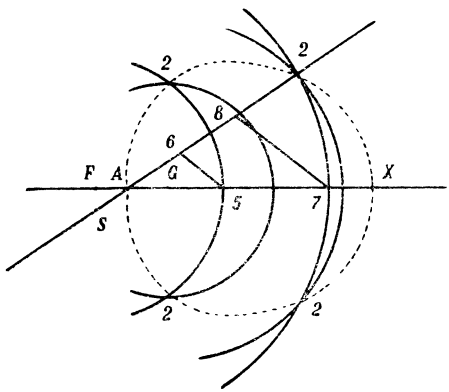


Рис. 139.

Линия же *AF* может быть даже равна нулю, так что точка *F* окажется там, где находится точка *A*. Чтобы описать третий овал *A3Y*, я, положив линии *AR* и *AS* равными *AH*, провожу из центра *H* окружность радиусом, равным *S6*. Эта окружность пересекает окружность, имеющую центр *F* и проходящую через точку *5*, в точке *3*. Затем я описываю из центра *H* другую окружность радиусом, равным *S8*. Эта окружность пересекает окружность, проходящую через точку *7*, в точке, помеченной также *3*, и т. д. Наконец, для последнего овала (рис. 141) я описываю из центра *H* окружности радиусами, равными линиям *R6*, *R8* и им подобным; эти окружности пересекают другие окружности в точках, помеченных *4*.

Можно было бы найти еще бесчисленное множество других способов описания этих овалов. Так, например, первый овал AV в случае, когда линии FA и AG равны, можно вычертить

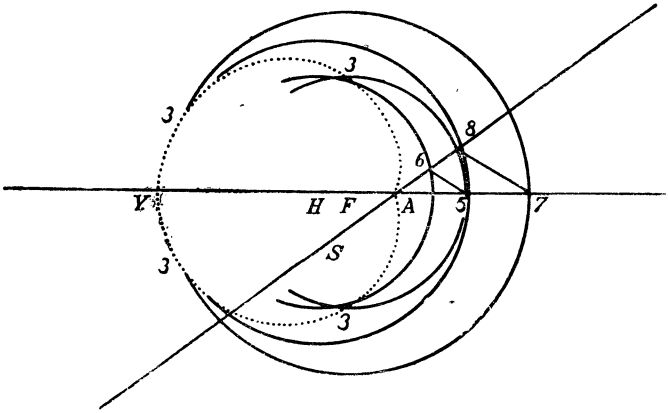


Рис. 140.

следующим образом: разделим линию FG (рис. 142) в точке L так, чтобы FL относилась к LG, как $A5$ к $A6$ (рис. 141), т. е. так, чтобы они находились в отношении, измеряющем преломления. Затем, разделив AL в точке K на две равные части, заставим некоторую линейку, например FE, вращаться вокруг F, придерживая пальцем в C веревку EC. Веревка,

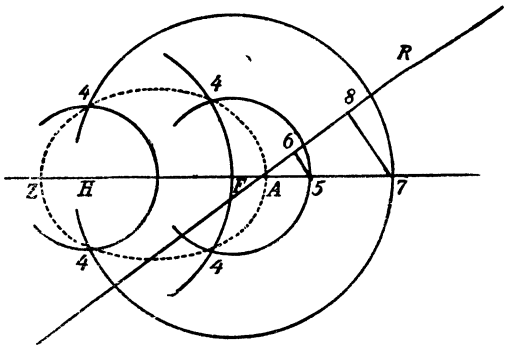


Рис. 141.

будучи привязана в одном из концов этой линейки, сгибается в точке C по направлению к точке K, затем в K она снова сгибается по направлению к C и в C — по направлению к G, где привязан ее другой конец; длина веревки, таким образом, складывается из длин линий GA плюс AL плюс FE минус AF. При движении точка C опишет этот овал, наподобие того, что говорилось в „Диоптрике“ об эллипсе и гиперболе. Но я не хочу дольше задерживаться на этом.

Хотя кажется, что все эти овалы имеют почти одинаковую природу, но тем не менее они принадлежат к четырем раз-

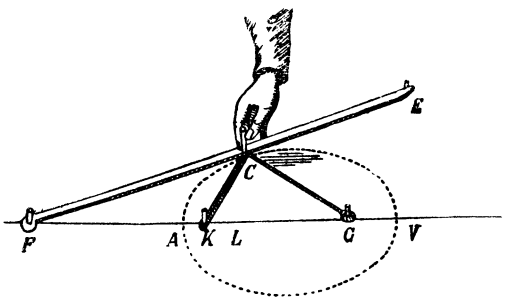


Рис. 142.

личным родам, в каждый из которых входит бесчисленное множество других родов, которые в свою очередь содержат в себе столько же различных видов кривых, сколько содержит род эллипсов или же род гипербол. Действительно, в зависимости от различия отношений между линиями $A5$ и $A6$ или им подобными различным окажется подчиненный род [genre subalterne] этих овалов. Далее, при изменении отношения между линиями AF и AG или AH (рис. 140) будет меняться вид овалов в каждом подчиненном роде. А в зависимости от того, больше или меньше AG или AH, овалы различаются по величине. Если линии $A5$ и $A6$ равны, то вместо овалов первого и третьего рода описываются прямые линии, вместо овалов второго рода — все возможные гиперболы и вместо овалов последнего рода — все эллипсы.

Свойства этих овалов, связанные с отражениями и преломлениями

Кроме того, в каждом из этих овалов следует различать две части, обладающие различными свойствами. Именно, часть первого овала (рис. 143), расположенная близ A, направляет все находящиеся в воздухе и исходящие из F лучи в точку G, если они на своем пути встречают выпуклое стекло, поверхность которого есть $1A1$ и в котором преломления, согласно сказанному в „Диоптрике", могут быть измерены отношением

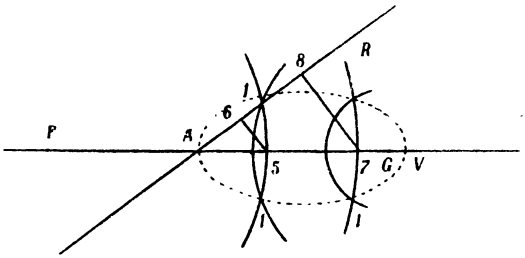


Рис. 143.

линий $A5$ и $A6$ или им подобных, с помощью которых описан этот овал.

Та же часть, которая находится близ V, отражает все исходящие из точки G лучи в точку F, если они там встречают вогнутую поверхность зеркала, форма которого есть $1V1$ и которое сделано из такого вещества, что ослабляет силу этих лучей в отношении, равном отношению линий $A5$ и $A6$. Действительно, из доказанного в „Диоптрике" ясно, что в этом случае углы отражения будут неравными, так же как и углы преломления, и отношение их можно будет измерить таким же образом.

Во втором овале часть $2A2$ (рис. 139) также годится для отражений, углы которых принимаются неравными. Действительно, если бы она была поверхностью зеркала, составленного из того же вещества, что и предыдущее, она бы отражала все

лучи, исходящие из точки G, так, что они после отражения казались бы исходящими из точки F. Следует заметить, что если взять линию AG значительно большей, чем AF, то зеркало будет выпуклым в середине близ A и вогнутым у краев; действительно, именно такова форма линии, которая в этом случае представляет скорее сердце, чем овал.

Но другая часть овала $2X2$ годится для преломления и такова, что когда лучи, которые, будучи в воздухе, стремятся к точке F, то они поворачиваются в направлении точки G, проходя сквозь поверхность стекла, имеющего такую форму.

Третий овал полностью годится для преломлений. Лучи, которые, будучи в воздухе, направляются к точке F, пройдя сквозь поверхность формы $A3Y3$ (рис. 140), направятся в стекле к точке H. Эта поверхность повсюду выпуклая и лишь около точки A слегка вогнутая, так что она, подобно предшествующей, имеет форму сердца. Разница между обеими частями этого овала состоит в том, что точка F ближе, чем точка H, к одной из них и дальше, чем та же точка H, от другой.

Таким же образом последний овал полностью годится для отражений. Если лучи, исходящие из точки H, встречают вогнутую поверхность зеркала, состоящего из того же вещества, что и предшествующие, и имеющего форму $A4Z4$ (рис. 141), то все они отражаются и собираются в точку F.

Таким образом, точки F и G или H можно назвать фокусами[73] этих овалов, по примеру фокусов эллипсов и гипербол, получивших такое название в „Диоптрике“.

Доказательство тех свойств этих овалов, которые связаны с отражениями и преломлениями

Я не буду останавливаться на ряде других преломлений и отражений, даваемых этими овалами, так как, будучи лишь обратными или противоположными приведенным, они легко

могут быть выведены из них. Но я должен дать доказательство всего сказанного мной. С этой целью выберем, например, в первой части первого из этих овалов произвольную точку G (рис. 144); затем проведем прямую CP, пересекающую кривую в точке C под прямыми углами, что легко сделать согласно предшествующей задаче. Действительно, принимая b за AG, c за AF, $c+z$ за FC, допустим, что отношение d к e, которое я здесь всегда буду считать измеряющим преломления предложенного стекла, является также отношением линий $A5$ и $A6$ или же им подобных, применявшихся при описании овала. Для GC это даст $b-\frac{e}{d}z$ и мы найдем, что линия AP есть, как и было показано выше,

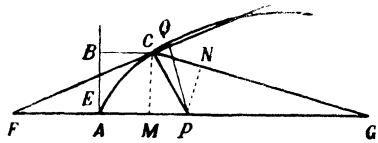


Рис. 144.

$$\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}.$$

Затем, опустив из точки P перпендикуляр PQ на прямую CF и перпендикуляр PN на GC, мы увидим, что если PQ относится к PN, как d к e, т. е. как линии, измеряющие преломления выпуклого стекла AC, то луч, идущий из точки F в точку C, преломится, попавши в это стекло, так, что затем направится в G. Это вполне очевидно из того, что говорилось в „Диоптрике". Проверим теперь посредством вычислений, что PQ относится к PN, как d к e. Прямоугольные треугольники PQF и CMF подобны, из чего следует, что CF относится к CM, как FP к PQ; следовательно, FP, умноженная на CM и деленная на CF, равна PQ. Точно так же подобны прямоугольные треугольники PNG и CMG, из чего следует, что GP, умноженная на CM и деленная на CG, равна PN. Далее, отношение двух величин не изменяется от умножения или деления их обеих на одну и ту

же величину. Значит, если FP, умноженная на CM и деленная на CF, относится к GP, также умноженной на CM и деленной на CG, как d к e, то, разделив каждое из обоих выражений на CM, затем умножив оба их на CF и еще на CG, мы получим, что FP, умноженная на CG, относится к GP, умноженной на CF, как d к e. Но, по построению, FP есть

$$c + \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez},$$

или же

$$FP = \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez}$$

и CG есть $b - \frac{e}{d}z$.

Значит, умножая FP на CG, мы получим:

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Далее, GP есть

$$b \frac{- bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez} [74],$$

или же

$$GP = \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$$

и CF есть $c + z$.

Значит, умножая GP на CF, мы получим

$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Так как первое из этих выражений, деленное на d, таково же, что и второе, деленное на e, то очевидно, что FP, умноженная на CG, относится к GP, умноженной на CF, т. е. что PQ относится к PN, как d к e. А это только и требовалось доказать.

Знайте, что это же доказательство распространяется на все сказанное о других преломлениях или отражениях в предложенных овалах; для этого нужно лишь изменить в процессе вычислений знаки + и —. Поэтому мне нет необходимости задерживаться на этом; каждый сумеет разобрать другие случаи самостоятельно.

Однако теперь я должен восполнить то, что мною было пропущено в „Диоптрике". Указав там, что стекла, которые в равной мере собирают все проходящие через них и исходящие из одной точки предмета лучи в некоторой другой точке, могут быть разной формы и отметив, что те из этих стекол, которые весьма выпуклы с одной стороны и вогнуты с другой, обладают большей зажигательной силой, чем стекла, равновыпуклые с обеих сторон, которые, наоборот, лучше для очков, я, учитывая трудности, представляемые для мастеров их шлифовкой, ограничился в „Диоптрике" рассмотрением лишь тех стекол, которые считал наилучшими с практической точки зрения. Поэтому, чтобы в теоретической части этой науки больше не оставалось ничего пожелать, я должен еще выяснить форму тех стекол, которые имеют одну из поверхностей сколь угодно выпуклой или вогнутой и тем не менее собирают все исходящие из одной точки или параллельные лучи в другой точке [75]. Я должен буду также выяснить форму стекол, дающих то же самое, но или одинаково выпуклых с обеих сторон, или же таких, что выпуклость одной из их поверхностей находится в данном отношении к выпуклости другой.

Как можно изготовить стекло, одна из поверхностей которого имеет любую выпуклость или вогнутость и которое собирает в данной точке все лучи, исходящие из другой данной точки

В первом случае мы примем, что точки G, Y, C и F даны и что лучи, исходящие из точки G, или же лучи, параллельные GA, должны, пройдя стекло, собираться в точке F.

Стекло это (рис. 145) вогнутое настолько, что если Y есть середина его внутренней поверхности, то край стекла помещается в C; таким образом, хорда CMC и YM — стрела дуги CYC — даны. Вопрос сводится к тому, что, во-первых, нужно установить, какой из ранее рассмотренных овалов должен служить формой поверхности стекла YC, для того чтобы все лучи, которые, находясь в нем, направлялись к одной и той же неизвестной еще точке, скажем H, выйдя из него, направлялись к другой точке, именно к F. Ибо нет ни одного явления, связанного с изменением отношений этих лучей при отражении или преломлении от одной точки к другой [76], которого нельзя было бы произвести с помощью какого-нибудь из этих овалов. Легко видеть, что требуемое в данном

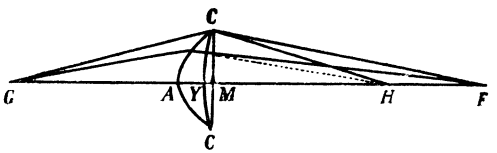


Рис. 145.

случае может быть достигнуто или частью третьего овала, несколько ранее обозначенной $3A3$, или частью его, обозначенной $3Y3$, или же, наконец, частью второго, обозначенной $2X2$. И так как здесь все эти три поверхности попадают под одинаковый расчет, то для каждой из них Y должна быть вершиной, C — одной из точек контура и F — одним из фокусов; после этого остается найти лишь точку H, которая должна быть другим фокусом. И мы находим ее, заметив, что разность линий FY и FC должна относиться к разности линий HY и HC, как d к e, т. е. как наибольшая из линий, измеряющих преломления предложенного стекла, к наименьшей, что очевидно из описания этих овалов. И так как линии FY и FC даны, то дана также их разность, и, значит, дана и разность HY и HC, поскольку дано отношение между этими двумя разностями. Далее, так как YM дана, то дана и разность между MH и HC; наконец, так как дана CM, то

остается лишь найти MH — сторону прямоугольного треугольника CMH, у которого дана другая сторона CM, а также разность основания CH и искомой стороны MH. Из этого легко определить MH. Действительно, если принять k за избыток CH над MH и n за длину линии CM, то MH будет $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$. Если найденная таким образом точка H отстоит от точки Y дальше, чем точка F, то линия CY должна быть первой частью овала третьего рода, обозначенной немного ранее *3A3*. Если же HY меньше FY или же HY превосходит HF настолько, что отношение их разности ко всей FY больше, чем отношение меньшей из измеряющих преломления линий e к большей d, т. е. положив $HF = c$, $HY = c + h$, если dh больше, чем $2ce + eh$, то CY должна быть второй частью того же овала третьего рода, обозначенной немного ранее *3Y3*. Если же dh равно или меньше, нежели $2ce + eh$, то CY должно быть второй частью овала второго рода, обозначенной выше *2X2*. И, наконец, если точка H совпадает с точкой F, что происходит лишь когда FY и FC равны, то линия YC будет окружностью.

После этого требуется найти другую поверхность этого стекла CAC. Если принять, что падающие на нее лучи параллельны, эта поверхность должна быть эллипсом с фокусом H и тогда ее легко найти. Если же допустить, что лучи исходят из точки G, то поверхность должна быть первой частью овала первого рода, два фокуса которого будут G и H и который проходит через точку C. Отсюда мы найдем вершину овала A, заметив, что GC превосходит GA на величину, относящуюся к величине, на которую HA превосходит HC, как d к e. Действительно, если принять k за разность CH и HM и AM обозначить x, то для разности AH и CH получится $x - k$; далее, если принять g за разность данных величин GC и GM, то для разности GC и GA получится $g + x$; и так как последняя, $g + x$, относится к другой разности, $x - k$, как d к e, то

$$ge + ex = dx - dk,$$

значит, линия x или AM, определяющая искомую точку A, есть

$$\frac{ge + dk}{d - e}.$$

Как изготовить стекло, которое давало бы тот же эффект, что и предшествующее, и выпуклость одной поверхности которого находилась бы в данном отношении к выпуклости другой

Во втором случае мы примем, что даны лишь точки G, C и F, отношение линий AM и YM и что требуется найти форму стекла ACY, собирающего в точке F все лучи, исходящие из точки G.

Мы снова здесь можем воспользоваться двумя овалами, один из которых — AC — имеет фокусы G и H, а другой — CY — фокусы F и H (рис. 146). Чтобы найти их, я в первую очередь допущу, что общая их точка H известна, и я буду искать AM по трем точкам — G, C, H — с помощью только что изложенного способа: именно, я приму k за разность CH и HM, g за разность GC и GM и, поскольку AC — первая часть овала первого рода, я найду для AM величину $\frac{ge + dk}{d - e}$. Затем по трем точкам — F, C, H — я также ищу MY так, чтобы CY была первой частью овала третьего рода. Приняв y за MY, f за разность CF и FM, для разности CF и FY я получу $f + y$. Затем, имея уже k, разность CH и HM, я получу, что разность CH и HY есть $k + y$. И я знаю, что эта разность должна относиться к $f + y$, как e к d, ибо мы имеем дело с овалом третьего рода. Отсюда я нахожу, что y или MY есть $\frac{fe - dk}{d - e}$. Затем, сложив обе найденные для AM и MY величины, я для всей AY найду $\frac{ge + fe}{d - e}$. Из этого следует,

что с какой бы стороны ни взять точку H, эта линия AY всегда образуется из величины, относящейся к той величине, на которую GC и CF обе вместе превосходят всю GF, как e, меньшая из двух линий, служащих для измерения преломлений предложенного стекла, к разности этих двух линий $d-e$. Это довольно красивая теорема. Найдя таким обра-

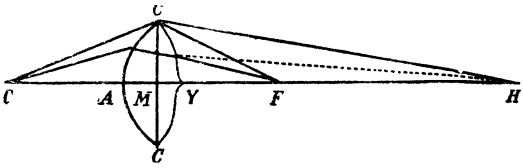


Рис. 146.

зом всю линию AY, ее следует разделить в отношении, в котором должны находиться ее части AM и MY. На основании этого, так как точка M уже известна, мы тогда найдем также точки A и Y и затем, согласно предшествующей задаче, точку H. Но прежде нужно посмотреть, будет ли найденная таким образом линия AM больше, меньше или равна $\frac{ge}{d-e}$. Если она больше, то мы из этого видим, что кривая AC должна быть первой частью овала первого рода, а CY — первой частью овала третьего рода, какими мы их здесь и предположили. Но если она меньше, то это показывает, что CY должна быть первой частью овала первого рода, а AC — первой частью овала третьего рода. Наконец, если AM равна $\frac{ge}{d-e}$, то кривые AC и CY должны быть двумя гиперболами.

Обе эти задачи межно было бы распространить на бесчисленное множество других случаев, на выводе которых я не останавливаюсь, так как они совершенно не применяются в „Диоптрике“.

Можно было бы также пойти еще дальше и указать, какой следует сделать поверхность стекла, чтобы оно соби-

рало все исходящие из данной точки лучи в другой данной точке, если дана другая его поверхность, являющаяся либо плоской, либо составленной из конических сечений или кругов. Это отнюдь не труднее изложенного мною выше, или, вернее, это значительно легче, так как путь к решению уже открыт. Но я предпочитаю предоставить эти поиски другим, для того чтобы некоторые трудности, которые, быть может, им при этом встретятся, заставили их лучше оценить открытие доказанных здесь вещей.

Как можно применять то, что здесь говорилось о кривых, описанных на плоской поверхности [superficie plate], к кривым, описываемым в пространстве трех измерений

Наконец, я здесь повсюду говорил лишь о тех кривых, которые можно описать на плоской поверхности. Однако сказанное о них можно легко перенести на все кривые, какие только можно представить образованными правильным движением точек какого-нибудь тела в пространстве трех измерений. Именно этого можно достигнуть, проведя из каждой точки рассматриваемой кривой по два перпендикуляра к двум пересекающимся под прямым углом плоскостям, — один к одной, и другой — к другой. В самом деле, концы этих перпендикуляров описывают две другие кривые — по одной в каждой из этих плоскостей. Все точки последних кривых можно определить и отнести к точкам прямой, общей этим двум плоскостям, по вышеизложенному способу, а благодаря этому будут вполне определены и точки кривой, имеющей три измерения [la courbe qui a trois dimensions]. Точно так же, если желательно провести прямую, пересекающую эту кривую в данной точке под прямыми углами, нужно лишь провести в обеих плоскостях две другие прямые, по одной в каждой из них, пересекающие под прямыми

углами расположенные в них кривые в тех двух точках, на которые падают перпендикуляры, проведенные из данной точки. Действительно, восставив две другие плоскости, каждая из которых проходит через одну из этих прямых и перпендикулярна к плоскости, в которой расположена соответствующая прямая, мы в пересечении этих двух плоскостей получим искомую прямую. Я полагаю теперь, что ничего не пропустил из начал, необходимых для познания кривых линий [77].

Книга III

О ПОСТРОЕНИИ ТЕЛЕСНЫХ, ИЛИ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ТЕЛЕСНЫЕ, ЗАДАЧ

Какими кривыми можно пользоваться при построении любой задачи

Хотя в геометрию должны быть допущены все кривые линии, которые можно описать посредством какого-либо правильного движения, — это вовсе не значит, что для построения всякой задачи дозволительно без различия воспользоваться любой первой попавшейся кривой. Необходимо всегда стараться выбрать наиболее простую кривую, позволяющую решить эту задачу. Нужно также заметить, что под наиболее простыми кривыми не следует понимать только те, которые проще всего описать, или те, которые дают наиболее легкое построение или доказательство предложенной задачи, но в особенности те, которые принадлежат к простейшему роду, позволяющему определить искомую величину [78].

Пример: нахождение нескольких средних пропорциональных

Так, например, я не думаю, чтобы существовал более простой и более очевидно доказываемый способ нахождения произвольного числа средних пропорциональных, чем

применение кривых, описываемых рассмотренным выше инструментом XYZ (рис. 147).

Действительно, для нахождения двух средних пропорциональных между YA и YE нужно лишь описать окружность диаметра YE; если эта окружность пересекает кривую AD в точке D, то YD является одной из искомых средних пропорциональных. Доказательство этого непосредственно ясно при приложении инструмента к линии YD; ибо

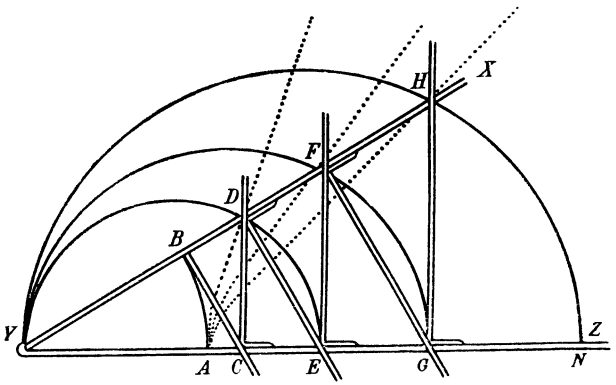


Рис. 147.

как YA, или равная ей YB, относится к YC, так YC относится к YD и YD к YE.

Точно так же для нахождения четырех средних пропорциональных между YA и YG или же шести между YA и YN нужно лишь провести окружность YFG, которая, пересекая AF в точке F, определяет одну из этих четырех средних пропорциональных — прямую YF или же, соответственно, окружность YHN, которая, пересекая AH в точке H, определяет одну из шести средних пропорциональных — YH, и так далее.

Однако так как кривая AD — второго рода, а две средние пропорциональные можно найти при помощи конических сечений, принадлежащих к первому роду, и так как четыре

или шесть средних пропорциональных можно найти при помощи линий менее сложного рода, чем AF и AH, то мы бы погрешили в геометрии, употребляя их здесь. С другой стороны, было бы ошибкой бесполезно тратить усилия в поисках построения задачи с помощью более простого рода линий, чем допускает ее природа.

О природе уравнений

Чтобы иметь здесь возможность дать некоторые правила для избежания обеих этих ошибок, я должен предварительно привести некоторые общие сведения о природе уравнений, т. е. о суммах[79], составленных из нескольких членов, которые частью известны, а частью неизвестны и из которых одни равны другим или же, лучше, которые, рассматриваемые все вместе, равны ничему[80]; ибо уравнения часто удобнее рассматривать именно последним образом.

Сколько корней может иметь любое уравнение

Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений; ибо если, например, принять x равным 2, или же $x-2$ равным ничему, а также $x=3$ или же $x-3=0$, то, перемножив оба эти уравнения

$$x-2=0 \quad \text{и} \quad x-3=0,$$

мы получим

$$xx-5x+6=0 \text{ или же } xx=5x-6,$$

уравнение, в котором величина x имеет значение 2 и вместе с тем значение 3. Если принять еще, что $x-4=0$, и умножить это выражение на

$$xx-5x+6=0,$$

то мы получим

$$x^3-9xx+26x-24=0,$$

другое уравнение, в котором x, обладая тремя измерениями, имеет вместе с тем три значения, а именно 2, 3 и 4[81].

Каковы ложные корни

Однако часто случается, что некоторые из этих корней ложны, или же меньше, чем ничто[82]. Например, если допустить, что x выражает собой также недостаток какой-нибудь величины, скажем 5, то мы получим $x+5=0$, и если это умножить на $x^3-9xx+26x-24=0$, то получится

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120=0,$$

— уравнение, у которого четыре корня, именно три истинных [vraies] — 2, 3, 4 — и один ложный [fausse] — 5.

Как можно уменьшить число измерений уравнения, если известен какой-нибудь из его корней

Отсюда очевидно, что сумму уравнения, обладающего несколькими корнями, всегда можно разделить на двучлен, составленный из неизвестной величины минус значение любого из истинных корней, либо плюс значение какого-либо из ложных корней[83]. Таким способом можно на столько же уменьшить измерения уравнения.

Как проверить, является ли какая-либо данная величина значением какого-либо корня

И обратно, если выражение уравнения нельзя разделить на двучлен, составленный из неизвестной + или — какая-нибудь другая величина, то это показывает, что эта другая величина не есть значение какого-либо из корней уравнения. Например, вышеприведенное уравнение

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$$

может быть разделено на $x-2$, и на $x-3$, и на $x-4$, и на $x+5$, но не на $x+$ или $-$ какая бы то ни была другая величина. Это показывает, что оно может иметь лишь четыре корня: 2, 3, 4 и 5.

Сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней

Отсюда также видно, сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней и сколько ложных. Именно, истинных корней может быть столько, сколько раз в нем изменяются знаки $+$ и $-$, а ложных столько, сколько раз встречаются подряд два знака $+$ или два знака $-$. Например, из того, что в последнем уравнении после $+x^4$ имеется $-4x^3$, что представляет собой перемену знака $+$ на $-$, после $-19xx$ имеется $+106x$, после $+106x$ имеется -120, что дает еще две перемены знака, мы узнаем, что существуют три истинных корня. Имеется также один ложный корень, ибо встречаются подряд два знака минус: у $4x^3$ и $19xx$ [84].

Как делают, чтобы ложные корни уравнения стали истинными, а истинные ложными

Легко далее сделать так, чтобы все корни одного и того же уравнения, бывшие ложными, стали истинными, и вместе с тем все бывшие истинными стали ложными; именно, это можно сделать, изменив на обратные все знаки $+$ или $-$, стоящие на втором, четвертом, шестом и других, обозначаемых четными числами местах, не изменяя знаки первого, третьего, пятого и им подобных, обозначаемых нечетными числами, мест. Например, если вместо

$$+x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$$

написать

$$+x^4+4x^3-19xx-106x-120=0,$$

то получится уравнение, обладающее только одним истинным корнем — 5 — и тремя ложными — 2, 3 и 4.

Как можно, не зная корней уравнения, увеличить их или уменьшить

Если угодно, не зная значения корней уравнения, увеличить или уменьшить их на какую-нибудь известную величину, то нужно лишь взять вместо неизвестного термина [terme inconnu] другой больший или меньший, чем первый, на эту самую величину, и подставить его везде вместо первого [85]. Например, если корень уравнения

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$$

желательно увеличить на 3, то вместо x нужно взять y и представить себе, что эта величина y больше x на 3, так что $y - 3$ равно x. Затем вместо xx нужно будет поставить квадрат величины $y - 3$, т. е. $yy - 6y + 9$, вместо x^3 — ее куб, то есть $y^3 - 9yy + 27y - 27$, и, наконец, вместо x^4 квадрат квадрата ее, т. е. $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$ Таким образом, выписав предшествующее выражение и подставив в нем везде y вместо x, мы получим

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 & -12y^3 & +54yy & -108y & +81 \\
 & +4y^3 & -36yy & +108y & -108 \\
 & & -19yy & +114y & -171 \\
 & & & -106y & +318 \\
 & & & & -120 \\
\hline
y^4 & -8y^3 & -1yy & +8y & * = 0
\end{array}$$ [86]

или же

$$y^3 - 8yy - 1y + 8 = 0,$$

где истинный корень, бывший раньше 5, теперь есть 8, так как к нему прибавлено число 3.

Наоборот, если корень того же уравнения желательно уменьшить на три, то следует положить

$$y+3=x \quad \text{и} \quad yy+6y+9=xx,$$

и так далее. В результате вместо

$$x^4+4x^3-19xx-106x-120=0$$

получится

$$\begin{array}{r}
y^4+12y^3+54yy+108y+81 \\
+4y^3+36yy+108y+108 \\
-19yy-114y-171 \\
-106y-318 \\
-120 \\
\hline
y^4+16y^3+71yy-4y-420=0.
\end{array}$$

Увеличивая истинные корни, мы уменьшаем ложные, и наоборот

Нужно заметить, что, увеличивая истинные корни уравнения, мы уменьшаем на ту же величину ложные, и наоборот: уменьшая истинные, мы увеличиваем ложные [87]. Далее, когда те или другие корни уменьшаются на равную им величину, они обращаются в ничто, а когда корни уменьшаются на величину, превосходящую их, то из истинных они становятся ложными, а из ложных истинными. Так, если здесь увеличить истинный корень, который был 5, на 3, то также на 3 уменьшится каждый из ложных корней, так что корень, бывший 4, станет лишь 1, бывший 3 — ничем, а бывший 2 станет истинным и будет 1, так как $-2+3$ дает $+1$. Именно поэтому в уравнении

$$y^3-8yy-1y+8=0$$

имеются теперь лишь 3 корня, из которых 1 и 8 истинны, а один, также 1, ложный. А в уравнении

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$$

имеется лишь один истинный корень, 2, так как $+5 - 3$ дает $+2$, и три ложных: 5, 6 и 7.

Как удалить второй член уравнения

С помощью этого способа изменения значения найденных корней можно сделать две вещи, которые получат некоторое применение в дальнейшем. Первая заключается в том, что всегда возможно удалить второй член рассматриваемого уравнения[88]. А именно, когда один из первых двух членов отмечен знаком $+$, а другой знаком $-$, это достигается уменьшением истинных корней на известную величину во втором члене[89], деленную на число измерений первого члена; когда же оба они имеют знак $+$ или же оба имеют знак $-$, это достигается путем их увеличения на ту же величину. Например, чтобы удалить второй член последнего уравнения

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0,$$

мы, поделив 16 на 4, ибо член y^4 имеет 4 измерения, получим снова 4. Поэтому я полагаю $z - 4 = y$ и пишу

$$\begin{array}{rrrrrr}
z^4 & -16z^3 & +96zz & -256z & +256 & \\
 & +16z^3 & -192zz & +768z & -1024 & \\
 & & +71zz & -568z & +1136 & \\
 & & & -4z & +16 & \\
 & & & & -420 & \\
\hline
z^4 & \star & -25zz & -60z & -36 & =0;
\end{array}$$

здесь истинный корень, бывший раньше 2, есть 6, так как он увеличен на 4, а ложные, бывшие 5, 6 и 7, из-за уменьшения каждого из них на 4 суть лишь 1, 2 и 3.

Точно так же, если желательно удалить второй член уравнения

$$x^4 - 2ax^3 \left.\begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix}\right\} xx - 2a^3 x + a^4 = 0,$$

то, поскольку при делении $2a$ на 4 получается $\frac{1}{2}a$, нужно положить $z + \frac{1}{2}a = x$ и написать

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2}aazz + \frac{1}{2}a^3 z + \frac{1}{16}a^4 & & & & \\
-2az^3 - 3aazz - \frac{3}{2}a^3 & & & z - \frac{1}{4}a^4 & \\
+2aa & zz & +2a^3 & +\frac{1}{2}a^4 & \\
-cc & & -acc & -\frac{1}{4}aacc & \\
 & & -2a^3 & -a^4 & \\
 & & & +a^4 & \\
\hline
z^4 \star & +\frac{1}{2}aa & -a^3 & +\frac{5}{16}a^4 & \\
 & zz & & z & = 0, \\
 & -cc & -acc & -\frac{1}{4}aacc &
\end{array}$$

и если потом будет найдено значение z, то, прибавив к нему $\frac{1}{2}a$, мы получим значение x.

Как можно сделать, чтобы все ложные корни уравнения стали истинными, но истинные не стали бы ложными

Вторая вещь, которая получит некоторое применение в дальнейшем, состоит в том, что посредством увеличения значений истинных корней на величину, большую величины любого из ложных, всегда можно сделать все корни истинными, так что уже более не встретятся подряд два знака + или два знака —, а также сделать известную величину в третьем члене больше квадрата половины известной вели-

чины во втором. Хотя все это производится при условии, что ложные корни не известны, но легко составить приблизительное суждение об их величине и взять затем величину, превосходящую их настолько или же больше, чем требуется для такой цели[90]. Например, если мы имеем

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0,$$

то, положив $y - 6\ n = 0$, найдем

$$\begin{array}{l}
y^6 - 36n \\
\quad + n
\end{array}\Bigg\}
\begin{array}{r}
y^5 + 540nn \\
- 30nn \\
- 6nn
\end{array}\Bigg\}
\begin{array}{r}
y^4 - 4320n^3 \\
+ 360n^3 \\
+ 144n^3 \\
+ 36n^3
\end{array}\Bigg\}
\begin{array}{r}
y^3 + 19440n^4 \\
- 2160n^4 \\
- 1296n^4 \\
- 648n^4 \\
- 216n^4
\end{array}\Bigg\}
\begin{array}{r}
yy - 46656n^5 \\
+ 6480n^5 \\
+ 5184n^5 \\
+ 3888n^5 \\
+ 2592n^5 \\
+ 1296n^5
\end{array}\Bigg\}
\begin{array}{r}
y + 46656n^6 \\
- 7776n^6 \\
- 7776n^6 \\
- 7776n^6 \\
- 7776n^6 \\
- 7776n^6 \\
- 7776n^6
\end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4y^2 - 27216n^5y\ * = 0.$$

Здесь очевидно, что величина $504nn$, известная величина в третьем члене, больше квадрата $\frac{35}{2}n$, половины известной величины во втором; и не бывает случая, чтобы величину, на которую увеличивают истинные корни, потребовалось для этой цели взять большей в сравнении с данными величинами, чем в этом случае.

Как заполняют в уравнении все места

Так как последний член в этом уравнении отсутствует, то, если это нежелательно, нужно еще хотя бы немного увеличить значение корней; и как бы мало ни было увеличение, оно будет достаточным для этой цели. Точно так же обстоит дело, когда угодно увеличить число измерений какого-нибудь уравнения и заполнить все места его членов. Например, если вместо

$$x^5 * * * * - b = 0$$

желательно получить уравнение, в котором неизвестная величина имеет шесть измерений и не отсутствует ни один из членов, то вместо

$$x^5 * * * * - b = 0$$

сперва нужно написать

$$x^6 * * * * - bx = 0;$$

затем, положив $y - a = x$, мы получим

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3 y^3 + 15a^4 yy \left.\begin{matrix} - 6a^5 \\ - b \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y + a^6 \\ + ab \end{matrix}\right\} = 0.$$

Здесь очевидно, что сколь малой ни предположить величину a, все места уравнения все равно будут заполнены.

Как можно, не зная корней, их умножать и делить

Далее, не зная значений истинных[91] корней уравнения, их все можно умножить или разделить на произвольную известную величину. Этого можно достигнуть, предположив, что неизвестная величина, умноженная или разделенная на величину, на которую требуется умножить или разделить корни, равна некоторой другой, а затем, умножив или разделив известную величину во втором члене на ту самую величину, на которую требуется умножить или разделить корни; известную величину в третьем — на ее квадрат; известную величину в четвертом — на ее куб, и так далее — до последнего члена.

Как приводят в уравнении дробные числа к целым

Это может служить для приведения к целым и рациональным числам дробей, а часто также и глухих чисел[92], находящихся в членах уравнений. Например, если

$$x^3 - \sqrt{3}xx + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

и если вместо этого уравнения желательно получить другое, все члены которого выражаются рациональными числами, то нужно принять $y = x\sqrt{3}$ и известную величину во втором члене, равную также $\sqrt{3}$, умножить на $\sqrt{3}$; известную величину в третьем, $\frac{26}{27}$, на его квадрат, т. е. на 3, и известную величину в последнем, $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, на его куб, т. е. на $3\sqrt{3}$. Это даст

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0.$$

Если затем вместо этого уравнения желательно получить еще другое, в котором все известные величины выражались бы только целыми числами, то следует принять $z = 3y$; и, умножив 3 на 3, $\frac{29}{9}$ на 9 и $\frac{8}{9}$ на 27, мы найдем

$$z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0.$$

Так как корни здесь суть 2, 3 и 4, то мы видим, что корни предыдущего уравнения были $\frac{2}{3}$, 1 и $\frac{4}{3}$, а корни первого

$$\frac{2}{9}\sqrt{3},\ \frac{1}{3}\sqrt{3}\ \text{ и }\ \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Как сделать известную величину в каком-либо члене уравнения равной любой величине

Это же действие может служить для того, чтобы известную величину в каком-либо члене уравнения сделать равной какой-либо другой величине. Например, если вместо уравнения

$$x^3 * - bbx + c^3 = 0$$

желательно получить другое уравнение, в котором известная величина в члене, занимающем третье место, здесь bb,

была бы $3aa$, то нужно принять $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ и затем написать

$$y^3 - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0.$$

Как истинные, так и ложные корни могут быть или действительными, или воображаемыми

Наконец, как истинные, так и ложные корни не всегда бывают действительными, оказываясь иногда лишь воображаемыми [imaginaires][93]. Другими словами, хотя всегда можно вообразить себе [imaginer] у каждого уравнения столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням. Так, например, хотя у уравнения

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$$

можно вообразить себе три корня, но на самом деле оно имеет только один действительный, именно 2. Что касается двух других корней, то сколько бы их ни увеличивать, уменьшать или умножать так, как я только что объяснил, все равно их не удастся сделать иными, чем воображаемыми.

Приведение кубических уравнений в случае плоской задачи

Если в поисках построения какой-нибудь задачи получается уравнение, в котором известная величина имеет три измерения, и если, во-первых, имеющиеся в уравнении известные величины содержат дроби, то посредством объясненного выше умножения их следует привести к целым числам. Если же они содержат глухие числа, то их также следует по возможности привести к рациональным числам при помощи как того же умножения, так и различных иных способов,

найти которые довольно легко. Затем, рассматривая по порядку все величины, на которые делится нацело последний член, следует установить, не может ли какая-нибудь из них при соединении с неизвестной величиной знаком + или — образовать двучлен, на который делилось бы все выражение[94]. И если это так, то задача является плоской, т. е. может быть построена при помощи линейки и циркуля. Действительно, либо искомым корнем будет входящая в двучлен известная величина, либо же уравнение, после деления на двучлен, приводится к двум измерениям, так что корень можно будет потом найти на основании сказанного в первой книге.

Если, например,

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

то последний член, 64, можно разделить нацело на 1, 2, 4, 8, 16, 32 и 64. На этом основании следует по порядку рассмотреть, нельзя ли разделить уравнение на какой-нибудь из двучленов: $yy - 1$ или $yy + 1$; $yy - 2$ или $yy + 2$; $yy - 4$, и т. д.; при этом мы найдем, что оно делится на $yy - 16$ следующим образом:

$$\begin{array}{l}
+y^6 - 8y^4 - 124yy \underline{-64} = 0 \\
\underline{-1y^6} \underline{-8y^4} \underline{-4yy} -16 \\
\quad 0 \quad \underline{-16y^4} \underline{-128yy} \\
\qquad\quad 16 \quad\; 16 \\
\hline
\qquad\quad +y^4 \quad +8yy \quad +4 = 0
\end{array}$$ [95].

Способ деления уравнения на двучлен, содержащий его корень

Я начинаю с последнего и делю —64 на —16, это дает +4, что я и записываю в частном. Затем я умножаю +4 на $+yy$, что дает $+4yy$, почему я и записываю в делимом выражении $-4yy$, ибо в нем всегда следует писать знак + и —, противоположный знаку, получающемуся при умножении. Прибавив $-124yy$ к $-4yy$, я нахожу $-128yy$ и это снова делю на —16, причем получаю $+8yy$, которые нужно

поставить в частном. Умножая это на yy, я, для прибавления к подлежащему делению члену, который также есть $-8y^4$, получаю $-8y^4$; вместе они дают $-16y^4$, и это я делю на -16. Это дает $+1y^4$ для частного и $-1y^6$ для прибавления к $+1y^6$, что дает 0 и свидетельствует об окончании деления. Но если бы осталась какая-нибудь величина или же если бы какой-нибудь из предшествующих членов нельзя было разделить нацело, то это обнаружило бы, что деление невозможно.

Аналогично, если

$$y^6 \left.\begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix}\right\} = 0,$$

то последний член можно нацело разделить на a, на aa, $aa+cc$, a^3+acc и т. п. Но рассмотреть нужно лишь два выражения, именно aa и $aa+cc$, ибо остальные, давая в частном или больше, или меньше измерений, чем их имеет известная величина в предпоследнем члене, не позволили бы произвести деление. При этом заметьте, что измерение y^6 я здесь принимаю равным лишь трем, так как во всем выражении нет ни y^5, ни y^3, ни y. Испытывая двучлен

$$yy - aa - cc = 0,$$

мы увидим, что деление на него можно произвести так:

$$y^6 \left.\begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

$$\begin{matrix} -aa - cc \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -y^6 - 2aa \\ 0 + cc \\ -aa - cc \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} -a^4 \\ -aacc \\ -aa - cc \end{matrix}\right\} yy$$

$$+y^4 \left.\begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix}\right\} = 0,$$

что показывает, что искомый корень есть $aa + cc$. Это легко проверить умножением.

Каковы телесные задачи, когда уравнение является кубическим

Но если нельзя найти такой двучлен, на который делится, таким образом, вся сумма предложенного уравнения, то зависящая от последнего задача, несомненно, телесная. После этого было бы не меньшей ошибкой пытаться ее построить при помощи лишь кругов и прямых линий, чем применять конические сечения к построению задач, для которых требуются только круги; ибо в конце концов все, что свидетельствует о каком-либо незнании, называется ошибкой.

О приведении уравнений с четырьмя измерениями в случае плоской задачи и о телесных задачах

Если имеется уравнение, в котором неизвестная величина имеет четыре измерения, то после удаления из него глухих и дробных чисел, если они имеются, следует таким же образом выяснить, нельзя ли найти двучлен, на который делилось бы все выражение, причем двучлен составляется из величин, на которые делится нацело последний член. Если такой двучлен удастся найти, то либо искомым корнем будет входящая в него известная величина, либо, по крайней мере после деления, останется уравнение, которое имеет всего три измерения и которое нужно будет затем, в свою очередь, подвергнуть такому же исследованию. Если же такой двучлен найти не удастся, то нужно по указанному выше способу путем увеличения или уменьшения значения корня удалить второй член выражения и затем привести последнее к другому выражению, содержащему лишь три измерения. Это проделывается следующим образом: вместо

$$+x^4 * \cdot pxx \cdot qx \cdot r = 0$$

нужно написать

$$+y^6 \cdot 2py^4 \left.\begin{matrix} +pp \\ \cdot 4r \end{matrix}\right\} yy - qq = 0 \quad [96].$$

Что касается опущенных мною знаков + и —, то если в предшествующем уравнении было $+p$, в последующем надо поставить $+2p$, а если было $-p$, то надо поставить $-2p$; наоборот, если было $+r$, то надо поставить $-4r$, а если было $-r$, то надо поставить $+4r$; далее, было ли $+q$ или $-q$, надо все равно поставить $-qq$ и $+pp$, по крайней мере, если предположить что x^4 и y^6 отмечены знаком +; в случае же знака — при них все было бы наоборот.

Если, например, мы имеем

$$+x^4 * -4xx - 8x + 35 = 0,$$

то вместо этого нужно написать

$$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0 \quad [97].$$

Действительно, так как величина, названная мною p, равняется здесь -4, то вместо $2py^4$ нужно поставить $-8y^4$; далее, так как величина, названная мною r, равняется здесь 35, то вместо $\left.\begin{matrix} +pp \\ +4r \end{matrix}\right\} yy$ нужно поставить $\left.\begin{matrix} +16 \\ -140 \end{matrix}\right\} yy$, т. е. $-124yy$, и, наконец, так как q равно 8, то вместо $-qq$ нужно поставить -64.

Аналогично, вместо

$$+x^4 * -17xx - 20x - 6 = 0$$

нужно написать

$$+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0,$$

ибо 34 вдвое больше 17, 313 представляет собой квадрат 17, сложенный с учетверенным 6, и 400 есть квадрат 20.

Аналогично также вместо

$$+z^4 * \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} -a^3 \\ +acc \end{matrix}\right\} z \left.\begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix}\right\} = 0$$

нужно написать

$$y^6 \left.\begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix}\right\} = 0,$$

так как p есть $+\frac{1}{2}aa - cc$, и pp есть $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, и $4r$ есть $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$ и, наконец, $-qq$ есть $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

После того как уравнение приведено таким путем к трем измерениям, следует, по уже изложенному способу, определить значение yy, а если его нельзя найти, то не следует итти дальше, так как это непременно означает, что задача телесная. Если же значение yy будет найдено, то предшествующее уравнение можно, пользуясь им, разделить на два других, в каждом из которых неизвестная величина будет обладать только двумя измерениями и корни которых будут те же, что и его корни. Именно, вместо уравнения

$$+x^4 * \cdot pxx \cdot qx \cdot r = 0$$

нужно написать два других:

$$+xx - yx + \frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} = 0$$

и

$$+xx + yx + \frac{1}{2}yy \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{q}{2y} = 0.$$

Что касается опущенных мною знаков $+$ и $-$, то если в предыдущем уравнении было $+p$, в каждом из данных надо поставить $+\frac{1}{2}p$, а если было $-p$, то надо поставить

$-\frac{1}{2}p$. Далее, если в первоначальном уравнении имеется $+q$, то в уравнении, где имеется $-yx$, надо поставить $+\frac{q}{2y}$, а в уравнении, где имеется $+yx$, надо поставить $-\frac{q}{2y}$. Наоборот, если там имеется $-q$, то в уравнении, где имеется $-yx$, надо поставить $-\frac{q}{2y}$, а в уравнении, где имеется $+yx$, надо поставить $+\frac{q}{2y}$. Таким путем легко узнать все корни предложенного уравнения и, следовательно, построить задачу, решение которой содержится в нем, пользуясь лишь кругами и прямыми линиями.

Например, так как, взяв

$$y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$$

вместо

$$x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0,$$

мы найдем, что yy есть 16, то вместо данного уравнения

$$+x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$$

нужно написать два других:

$$+xx - 4x - 3 = 0$$

и

$$+xx + 4x + 2 = 0,$$

ибо y есть 4, $\frac{1}{2}yy$ есть 8, p есть 17 и q есть 20. Таким образом,

$$+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ дает } -3,$$

$$+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ дает } +2.$$

Извлекая корни этих двух уравнений, мы найдем как раз все те корни, которые получились бы из уравнения, содержащего x^4,— именно один истинный, $\sqrt{7}+2$, и три ложных:

$$\sqrt{7}-2,\quad 2+\sqrt{2} \text{ и } 2-\sqrt{2}.$$

Аналогично, если

$$x^4 * -4xx-8x+35=0 \text{ [98]},$$

то, так как корень уравнения

$$y^6-8y^4-124yy-64=0$$

снова есть 16, нужно написать

$$xx-4x+5=0$$

и

$$xx+4x+7=0.$$

Действительно, здесь

$$+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y} \text{ дает } 5$$

и

$$+\frac{1}{2}yy-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y} \text{ дает } 7.$$

Так как у обоих последних уравнений мы не найдем ни истинных, ни ложных корней, то из этого узнаем, что четыре корня того уравнения, из которого получены данные,— воображаемые. Задача, для которой было найдено уравнение, по природе своей плоская, но она не может быть построена никоим образом, ибо данные величины входить в таком сочетании [se joindre] не могут.

Аналогично, если

$$z^4 * \left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}da\\ -\quad cc\end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix}-a^3\\ -acc\end{matrix}\right\} z \begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\ -\frac{1}{4}aacc\end{matrix} =0,$$

то, так как мы найдем для yy значение $aa+cc$, нужно будет написать

$$zz-\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{3}{4}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}=0$$

и

$$zz+\sqrt{aa+cc}\,z+\frac{3}{4}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}=0.$$

Действительно, y есть $\sqrt{aa+cc}$, $+\frac{1}{2}yy+\frac{1}{2}p$ есть $\frac{3}{4}aa$, и $\frac{q}{2y}$ есть $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Из этого видно, что значение z есть

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

или же

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Так как мы положили выше $z+\frac{1}{2}a=x$, то узнаем, что величина x, для нахождения которой мы произвели все эти действия, есть

$$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Пример употребления этих приведений

Чтобы можно было лучше уяснить всю пользу этого правила, я применю его к решению какой-нибудь задачи.

Допустим, например (рис. 148), что даны квадрат AD и линия BN и что требуется так продолжить сторону AC до E, чтобы линия EF, проведенная из E к B, была равна NB. Из работ Паппа известно, что если продолжить сперва BD до G, так, чтобы DG была равна DN, и описать круг диаметра BG, а затем продолжить прямую AC, то она пересечет окружность этого круга в искомой точке E. Но тем, кто не знаком

с этим построением, найти его будет довольно трудно. Если бы они стали искать его при помощи предложенного мною здесь способа, то им никогда не пришло бы в голову принять за неизвестную величину DG; в качестве нее они скорее взяли бы CF или FD, ибо как раз эти величины легче всего приводят к уравнению. При этом получилось бы уравнение, привести которое, не прибегнув к изложенному мною выше правилу, было бы отнюдь не легко. В самом деле, полагая BD или CD равными a, EF равной c, DF равной x, мы найдем, что CF равна $a-x$ и что CF или $a-x$ относится к FE или c, как FD или x относится к BF, которая, следовательно, есть $\frac{cx}{a-x}$. Затем, так как треугольник BDF прямоугольный и одна из сторон его равна x, а другая a, то их квадраты, т. е. $xx+aa$, равны квадрату основания, который есть $\frac{ccxx}{xx-2ax+aa}$. Таким образом, умножая все на $xx-2ax+aa$, мы найдем, что уравнение будет

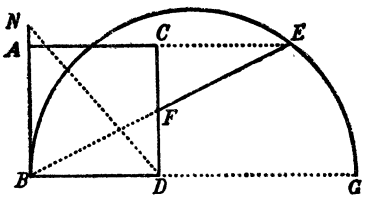


Рис. 148.

$$x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4=ccxx$$

или же

$$x^4-2ax^3\left.\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}\right\}xx-2a^3x+a^4=0.$$

Отсюда мы при помощи предыдущих правил узнаем, что его корень, представляющий собой длину линии DF, есть

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Если бы в качестве неизвестной величины взяты были BF или CE [99], или BE, то мы снова пришли бы к уравнению,

которое имело бы четыре измерения, но которое привести было бы легче. Притти к этому уравнению было бы довольно легко; между тем, если бы мы взяли DG, то уравнение, правда, очень простое, было бы получить значительно труднее. Я указываю на это с целью предупредить вас, что когда предложенная задача не телесна и когда, решая ее одним путем, приходишь к очень сложному уравнению, то, решая ее другим путем, можно обыкновенно притти к более простому уравнению [100].

Я мог бы к этому добавить еще несколько различных правил приведения уравнений, восходящих до куба или квадрата квадрата, но они были бы лишними, ибо в случае плоских задач построение их всегда можно найти, пользуясь уже приведенными правилами.

Общее правило приведения уравнений выше квадрато-квадратных

Я мог бы также добавить и другие правила для уравнений, восходящих до сверхтела или до квадрата куба, или же выше. Однако я предпочитаю объединить их все воедино и указать вообще, что если, пытаясь привести эти уравнения к уравнениям той же формы и с тем же числом измерений и получающимся при перемножении двух других уравнений меньшего числа измерений, и перебрав все способы, какими можно произвести такое перемножение, мы увидим, что осуществить это никак нельзя, — то можно быть уверенным, что наши уравнения не могут быть приведены к более простым. Следовательно, если неизвестная величина имеет три или четыре измерения, то задача, в которой ее ищут, будет телесной, а если она имеет пять или шесть измерений, то задача будет на один порядок сложнее, и т. д.

Я не привел здесь доказательств большей части сказанного по той причине, что они кажутся мне столь легкими, что если вы только потрудитесь методически проверить, не

ошибся ли я, то эти доказательства представятся сами собой. И будет полезнее познакомиться с ними таким путем, чем путем простого чтения.

Общий способ построения всех телесных задач, приводящихся к уравнению трех или четырех измерений

Если мы удостоверились, что предложенная задача телесная, то будет ли уравнение, служащее для ее решения, восходить до квадрата квадрата или же только до куба, корень его всегда можно найти посредством любого из трех конических сечений или даже части одного из них, хотя бы столь малой, насколько это лишь возможно, и пользуясь еще только прямыми и кругами. Но я удовольствуюсь здесь тем, что дам общее правило нахождения всех корней посредством параболы, ибо в некотором отношении оно является простейшим.

В первую очередь, если имеется еще второй член уравнения, то следует его удалить. Тогда, если неизвестная величина имеет только три измерения, мы приведем уравнение к виду

$$z^3 = * \cdot apz \cdot aaq,$$

а если неизвестная имеет четыре измерения, то к виду

$$z^4 = * \cdot apzz \cdot aaqz \cdot a^3 r,$$

или же, принимая a за единицу, к виду

$$z^3 = * \cdot pz \cdot q$$

и к виду

$$z^4 = * \cdot pzz \cdot qz \cdot r.$$

Далее, предположим, что парабола FAG (рис. 149) уже описана, что ось ее есть $ACDKL$, что ее прямая сторона есть a,

или 1, что отрезок AC равен половине этого и что, наконец, точка C находится внутри параболы, а точка A является ее вершиной. Затем следует положить $CD=\frac{1}{2}p$ и в случае, если в уравнении стоит $+p$, взять ее с той же стороны, с которой расположена точка A относительно точки C [101], а если в нем стоит $-p$, то с другой стороны. Далее, в точ-

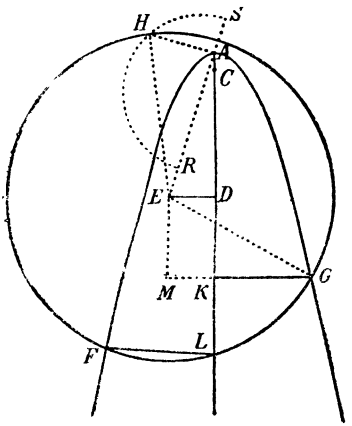


Рис. 149.

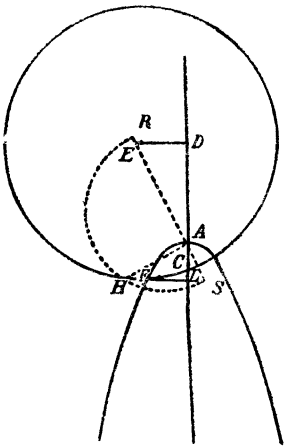


Рис. 150.

ке D или же, если величина p есть нуль, в точке C следует восстановить перпендикуляр и продолжить его до E так, чтобы он был равен $\frac{1}{2}q$. И, наконец, из центра E нужно описать окружность FG, полудиаметр которой, в случае, если уравнение лишь кубическое, так что величина r есть нуль, будет AE. Но если в уравнении имеется $+r$, то на одной стороне продолженной линии AE (рис. 150) нужно взять AR, равную r, а на другой AS, равную прямой стороне параболы, т. е. 1, и затем, описав окружность с диаметром RS, восстановить перпендикуляр AH к AE, пересекающий окружность

RHS в точке H, через которую должна проходить окружность FHG. Если же в уравнении имеется $-r$, то, найдя указанным образом линию AH, нужно в другую окружность, с диаметром AE (рис. 151), вписать равную AH линию AI; тогда первая искомая окружность FIG должна проходить через точку I[102].

Окружность FG может пересечь параболу или коснуться ее в одной, или в двух, или в трех, или в четырех точках, и если из них опустить перпендикуляры на ось, то получатся все корни уравнения — как истинные, так и ложные. А именно, если величина q отмечена знаком $+$, то истинными корнями будут значения тех перпендикуляров, которые, подобно FL, находятся с той же стороны параболы, что и центр окружности E; остальные, вроде GK, будут ложными. Наоборот, если величина q отмечена знаком $-$, то истинные корни будут находиться с другой стороны, а ложные, или меньшие, чем ничто, — с той же стороны, что и центр окружности E. Наконец, если окружность не пересекает и не касается параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных корней и что все они воображаемые. Таким образом, приведенное правило является настолько общим и полным, как этого только можно пожелать[103].

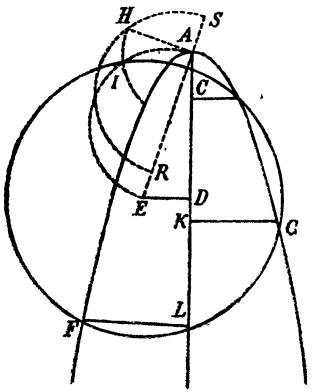
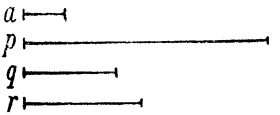


Рис. 151.

Доказать сказанное очень легко. Действительно, если найденная в этом построении линия GK называется z, то из свойства параболы, согласно которому GK должна быть средней пропорциональной между AK и прямой стороной, т. е. 1, следует, что AK будет zz. Далее, если от AK (рис. 152)

отнять AC, т. е. $\frac{1}{2}$, и CD, т. е. $\frac{1}{2}p$, то останется DK или EM, т. е. $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, квадрат чего есть

$$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}.$$



А так как DE или KM есть $\frac{1}{2}q$, то вся GM есть $z + \frac{1}{2}q$, квадрат чего есть

$$zz + qz + \frac{1}{4}qq.$$

Складывая оба эти квадрата, мы получим

$$z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq +$$

$$+ \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4},$$

что выражает собой квадрат линии GE, основания прямоугольного треугольника EMG.

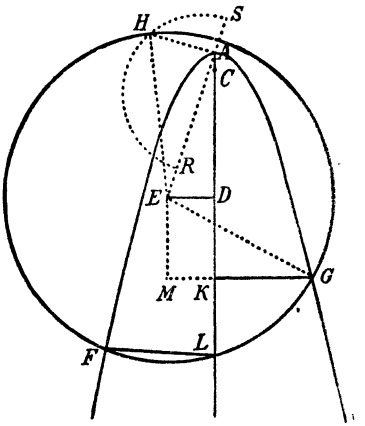


Рис. 152.

Но так как та же линия GE, с другой стороны, является полудиаметром круга FG, то ее можно выразить еще и через другие члены. Именно, так как

$$ED \text{ есть } \frac{1}{2}q \text{ и } AD \text{ есть } \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$$

и угол ADE прямой, то EA есть

$$\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}.$$

Далее, так как HA есть средняя пропорциональная между AS, т. е. 1, и AR, т. е. r, то она есть $\sqrt{r}$; и так как угол EAH прямой, то квадрат HE или EG будет

$$\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r,$$

и, таким образом, между этим выражением и предшествующим получается уравнение, которое есть то же, что и

$$z^4 = * pzz - qz + r.$$

Следовательно, найденная линия GK, названная нами z, является корнем этого уравнения, что и требовалось доказать. Если вы примените такие же вычисления во всех прочих случаях этого правила, меняя в соответствии с обстоятельствами знаки + и —, то вы также найдете требуемое решение, и мне нет необходимости на этом останавливаться.

Нахождение двух средних пропорциональных

Допустим, что при помощи этого правила хотят найти две средние пропорциональные между линиями a и q. Всякий знает, что если принять z за одну из них, то как a относится к z, так z относится к $\frac{zz}{a}$ и $\frac{zz}{a}$ к $\frac{z^3}{aa}$; и таким образом между q и $\frac{z^3}{aa}$ имеется уравнение, т. е.

$$z^3 = ** aaq.$$

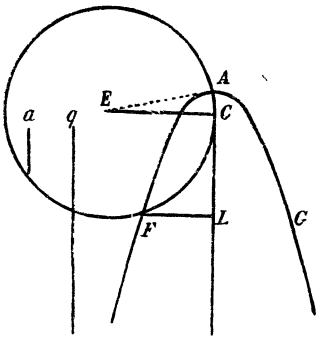


Рис. 153.

Если описаны парабола FAG (рис. 153) и часть ее оси AC, равная $\frac{1}{2}a$, т. е. половине прямой стороны, то в точке C нужно восстановить перпендикуляр CE, равный $\frac{1}{2}q$, а из центра E

описать проходящую через точку A окружность AF и мы найдем в качестве искомых средних пропорциональных FL и LA.

Способ деления угла на три равные части

Точно так же, если угодно разделить на три равные части угол NOP (рис. 154) или же дугу, или часть круга $NQTP$[101], то, положив радиус круга $NO=1$, хорду [la subtendue] данной

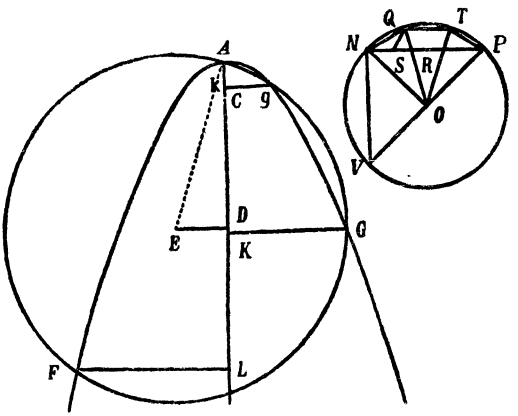


Рис. 154.

дуги $NP=q$ и хорду трети дуги $NQ=z$, мы получим уравнение

$$z^3 = *3z - q.$$

Действительно, если провести линии NQ, OQ, OT и провести QS параллельно TO, то ясно, что, как NO относится к NQ, так NQ к QR и QR к RS. И так как NO есть 1, NQ есть z, то QR есть zz, и RS есть z^3. Далее, так как для того чтобы линия NP, т. е. q, была втрое больше NQ, т. е. z, недостает только RS или z^3, то

$$q = 3z - z^3 \text{ или же } z^3 = *3z - q.$$

Если парабола FAG описана и CA, половина ее прямой стороны, есть $\frac{1}{2}$, то, взяв $CD=\frac{3}{2}$, а перпендикуляр $DE=\frac{1}{2}q$, опишем из центра E через точку A окружность $FAgG$; эта окружность пересечет параболу в трех точках F, g, G, не считая еще точки A — вершины. Это показывает, что данное уравнение имеет три корня, именно два истинных, GK и gk, и третий — ложный, FL. В качестве искомой линии NQ из двух истинных корней следует взять меньший, gk. Действительно, другой корень, GK, равен NV, — хорде одной трети дуги NVP, дополняющей другую дугу, NQP, до окружности. Ложный корень FL, как в этом легко убедиться с помощью вычисления, равен QN и NV, обоим вместе.

Все телесные задачи могут быть приведены к этим двум построениям

Было бы лишним задерживаться здесь, приводя еще другие примеры, ибо все задачи, являющиеся только телесными, можно привести таким образом, что это правило потребуется для их построения лишь в той мере, в какой оно служит для нахождения двух средних пропорциональных или же для деления угла на три равные части. Вы это поймете, если примете во внимание, что встречающиеся в телесных задачах трудности всегда можно выразить посредством уравнений, восходящих не выше куба или квадрата квадрата, и что все уравнения, восходящие до квадрата квадрата, приводятся к квадратным при помощи некоторых других уравнений, восходящих лишь до куба, и что, наконец, из последних можно удалить второй член. Таким образом среди них нет таких, которые не могли бы быть приведены к одной из следующих трех форм:

$$z^3 = * - pz + q,$$
$$z^3 = * + pz + q,$$
$$z^3 = * + pz - q.$$

Если мы имеем $z^3 = \star - pz + q$, то правило, приписываемое Кардано некоему Сципиону Ферро [105], учит, что корень есть

$$\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Точно так же, если $z^3 = \star + pz + q$ и квадрат половины последнего члена больше куба трети известной величины

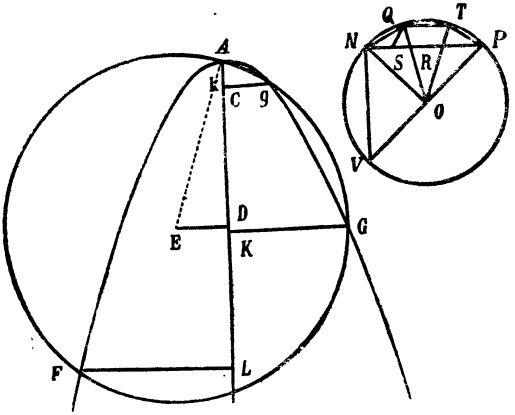


Рис. 155.

в предпоследнем, то подобное же правило учит нас, что корень есть

$$\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Из этого вытекает, что все задачи, трудности которых приводятся к одной из этих двух форм, можно построить, используя конические сечения только для извлечения кубических корней из некоторых данных величин, т. е. для нахождения двух средних пропорциональных между этими величинами и единицей.

Допустим далее, что $z^3 = \star + pz + q$ и что квадрат половины последнего члена не больше куба трети известной величины в предпоследнем. Если представить себе круг $NQPV$ (рис. 155), полудиаметр NO которого равен $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, т. е. сред-

ней пропорциональной между третью данной величины p и единицей, а также вписать в этот круг линию NP, равную $\frac{3q}{p}$, т. е. относящуюся к другой данной величине q, как единица к трети p, то нужно будет только разделить каждую из обеих дуг NQP и NVP на три равные части, и мы тогда получим хорду трети одной из дуг, NQ, и хорду трети другой, NV, которые, взятые вместе, составят искомый корень.

Наконец, допустим что $z^3 = \star pz - q$. Если опять-таки представить себе круг $NQPV$, радиус NO которого есть $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, и вписанную в него прямую NP, равную $\frac{3q}{p}$, то NQ, хорда трети дуги NQP, будет одним из искомых корней, а NV, хорда трети другой дуги, — другим. Это справедливо, когда квадрат половины последнего члена не более куба трети известной величины в предпоследнем; ибо если бы он был более, то линию NP нельзя было бы вписать в круг, так как она тогда была бы длиннее его диаметра. По этой причине оба истинных корня данного уравнения являлись бы лишь воображаемыми, и из действительных корней имелся бы только ложный, равный, согласно правилу Кардано,

$$\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}\,[106].$$

Способ выражения всех корней кубических уравнений и, следовательно, всех уравнений, восходящих не выше квадрата квадрата

Следует заметить, впрочем, что этот способ выражения корней при помощи того отношения, которое они имеют к сторонам некоторых кубов, у которых известен только объем, ничуть не понятнее и не проще, чем способ выражения их при помощи того отношения, которое они имеют к хордам некоторых дуг или частей кругов, утроенное кратное которых дано. При этом все корни кубических уравне-

ний, которые не могут быть выражены при помощи правил Кардано, можно выразить столь же или более ясно изложенным здесь способом.

Если, например, думают, что знают корень уравнения

$$z^3 = * + pz + q,$$

ибо известно, что он состоит из двух линий, одна из которых является стороной куба, объем которого равен сумме $\frac{1}{2}q$ и стороны квадрата с площадью $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, а другая — стороной другого куба, объем которого равен разности $\frac{1}{2}q$ и стороны этого квадрата с площадью $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, а это все, что мы узнаем из правила Кардано, то несомненно, что корень уравнения

$$z^3 = * + pz - q$$

познается столь же или более отчетливо, когда его рассматривают как вписанный в круг полудиаметра $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ и знают, что он является хордой такой дуги, что дуга втрое большая имеет хорду $\frac{3q}{p}$. Эти выражения даже значительно проще первых, и они были бы еще короче, если бы для обозначения хорд пользовались каким-нибудь особым знаком, подобно тому как для обозначения стороны кубов пользуются знаком $\sqrt{C}$ [107].

Из вышеизложенного следует, что, пользуясь вышеприведенными правилами, можно выразить корни всех уравнений, восходящих до квадрата квадрата включительно. И я поэтому не знаю, чего еще можно пожелать в этом вопросе, ибо самая сущность этих корней не позволяет ни выразить их в более простых выражениях, ни определить их посредством какого-нибудь другого построения, которое было бы одновременно и более общим, и более легким.

Почему телесные задачи нельзя построить без помощи конических сечений, а более сложные — без помощи каких-либо других, более сложных линий

Правда, я не сказал еще, на чем основываюсь, позволяя себе таким образом утверждать, что данная вещь возможна или же что она невозможна. Но если обратить внимание на то, как при помощи употребляемого мной метода все, что попадает под рассмотрение геометров, приводится к одному и тому же роду задач, а именно к отысканию значения корней какого-нибудь уравнения, перечислить все способы нахождения которых нетрудно, то можно признать, что этого достаточно для убедительного доказательства того, что метод выбран был самый общий и самый простой. В частности для телесных задач, которых, по моим словам, нельзя построить, не прибегая к более сложным линиям, чем круговая, мое утверждение можно вывести из того, что все они приводятся к двум построениям, в одном из которых требуется получить обе точки, определяющие две средние пропорциональные между двумя данными линиями, а в другом — две точки, делящие на три равные части данную дугу. Действительно, поскольку кривизна [la courbure] круга зависит лишь от простого отношения всех его частей к одной точке, служащей его центром, то и пользоваться ею можно лишь при определении одной точки между двумя крайними точками или при определении одной средней пропорциональной между двумя данными прямыми, или при делении дуги пополам. Между тем кривизна конических сечений, зависящая всегда от двух различных вещей, позволяет определить также и две различные точки [103].

На том же основании ни одна из задач, на один порядок более сложных, чем телесные, и предполагающих нахождение четырех средних пропорциональных или же деление угла на пять равных частей не может быть построена с помощью какого бы то ни было из конических сечений. Поэтому я

полагаю, что сделаю самое лучшее из того, что могу, если приведу общее правило их построения при помощи кривой, описываемой пересечением параболы и прямой по вышеизложенному способу. Действительно, я смею утверждать, что в природе не существует более простой, пригодной для этой же цели кривой. И вы видели, как эта кривая непосредственно следует за коническими сечениями в этом вопросе, который столь усердно изучали древние и решение которого дает по порядку все кривые, подлежащие включению в геометрию.

Общий способ построения всех задач, приводящихся к уравнению, имеющему не более шести измерений

Вы уже знаете, каким образом можно при определении величин, нужных для построения этих задач, привести последние к какому-либо уравнению, восходящему не выше квадрата куба или сверхтела. Вы знаете также, как путем увеличения корней этого уравнения можно всегда сделать все его корни истинными и вместе с тем известную величину в третьем члене большей, чем квадрат половины ее во втором. Вы знаете, наконец, каким образом уравнение, восходящее лишь до сверхтела, можно повысить до квадрата куба, а также заполнить все места всех его членов. Для того чтобы все встречающиеся здесь затруднения можно было разрешить при помощи одного правила, я требую, чтобы все это уже было сделано и чтобы, таким образом, они были всегда уже приведены к уравнению

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0,$$

причем величина, названная здесь q, больше квадрата половины величины, названной p.

Неопределенно продолжив в обе стороны линию BK и восставив в точке B перпендикуляр AB длиной в $\frac{1}{2}p$,

нужно в какой-либо отдельной плоскости описать параболу CDF (рис. 156), прямая сторона которой есть $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, что я для краткости назову n. Затем плоскость этой параболы нужно наложить на плоскость линий AB и BK так, чтобы ее ось DE оказалась как раз в верхней части прямой линии BK. Приняв часть этой оси между точками E и D равной $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, в точке E следует так приложить длинную линейку, чтобы, будучи приложена также и в точке A нижней плоскости, она всегда оставалась связанной с этими двумя точками при перемещении параболы вверх и вниз вдоль линии BK, на которой находится ее ось. Пересечение параболы и линейки, происходящее в точке C, опишет тогда кривую ACN, которая нам как раз и нужна для построения предложенной задачи. Действительно, описав таким образом кривую, возьмем на линии BK точку L с той стороны, к которой обращена вершина параболы, и проведем BL, равную DE, т. е. $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Затем отложим на той же линии BK в направлении от L к B линию LH, равную $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$; в найденной таким образом точке H восставим к BK в сторону кривой ACN перпендикуляр HI, длина которого будет $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, что для краткости назовем $\frac{m}{nn}$. Потом, соединив точки L и I,

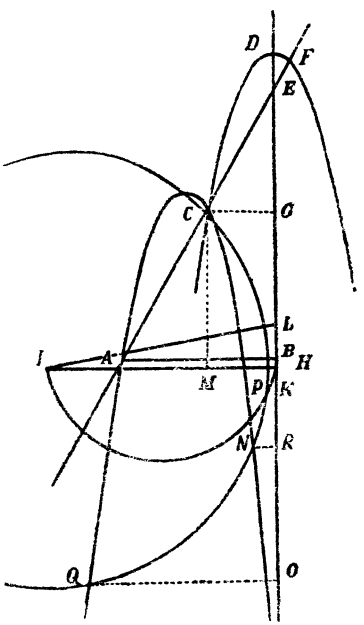


Рис. 156.

опишем окружность LPI диаметра IL и впишем в эту окружность линию LP, длина которой равна $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$. И, наконец, из центра I, через найденную таким образом точку P, опишем окружность PCN. Эта окружность пересечет или коснется кривой ACN в таком числе точек, сколько будет корней уравнения; и таким образом перпендикуляры, опущенные из этих точек на линию BK, как CG, NR, QO и им подобные, будут искомыми корнями. Правило это не допускает никаких исключений или отклонений. Действительно, если бы величина s была столь велика по сравнению с другими, p, q, r, s, t и v, что линия LP оказалась бы больше диаметра круга IL и поэтому не могла бы быть в него вписана, то предложенное уравнение вовсе не имело бы корней, отличных от воображаемых. То же самое случилось бы, если бы окружность IP была столь мала, что ни в одной точке не пересекала бы кривую ACN. Окружность может пересечь кривую ACN в шести различных точках, так же как уравнение может иметь шесть различных корней. Если же она пересекает ее в меньшем числе точек, то это свидетельствует о том, что некоторые из этих корней равны или же лишь воображаемы.

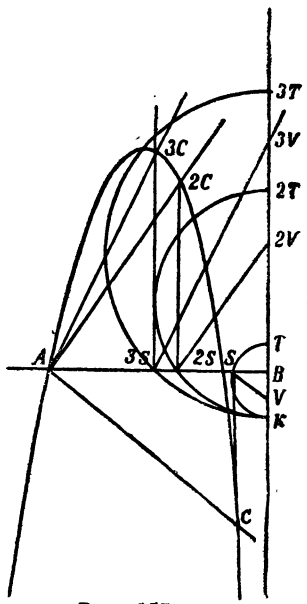


Рис. 157.

Если проведение линии ACN посредством перемещения параболы кажется вам неудобным, то легко найти многие другие способы ее описания. Возьмем, например, в качестве AB, BL и BK, принятой за главную прямую сторону параболы, те же величины, что и ранее. Затем из взятого произвольным образом на BK (рис. 157) центра опишем полуокружность

KST так, чтобы она где-либо пересекала линию AB, скажем, в точке S. От точки T, где кончается полуокружность, отложим в направлении к K линию TV, равную BL, и затем, проведя линию SV, проведем из точки A параллельную ей линию AC. Далее, через точку S проведем еще SC параллельно BK; C, точка пересечения этих двух параллелей, будет одной из точек искомой кривой. Аналогичным образом можно найти сколько угодно других точек.

Все это довольно легко доказать. Действительно, приложим линейку AE и параболу FD вместе в точке C, что можно сделать, ибо точка C лежит на кривой ACN, описываемой при их пересечении (рис. 158). Если CG назвать y, то GD будет $\frac{yy}{n}$, ибо прямая сторона n относится к CG, как CG к GD. Отнимая DE, т. е. $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, от GD, мы для GE получим $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Затем, так как AB относится к BE, как CG к GE, и AB есть $\frac{1}{2}p$, то BE будет $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Точно то же будет, если предположить, что точка C кривой находится при пересечении прямых: SC, параллельной BK, и AC, параллельной SV. SB, равная CG, есть y, и так как BK равна прямой стороне параболы, названной мной n, то BT есть $\frac{yy}{n}$. Действительно, KB относится к BS, как BS к BT. И так как TV равна BL, т. е. $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, то BV есть $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. А так как SB относится к BV, как AB к BE, то BE, как и раньше, будет $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$. Отсюда ясно, что с помощью обоих способов описывается одна и та же кривая.

Затем, так как BL и DE равны то равны, также DL и BE. Значит, прибавив LH, т. е. $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, к DL, т. е. $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, мы получим всю DH, которая есть

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}.$$

Отняв отсюда линию GD, т. е. $\frac{yy}{n}$, получим GH, т. е.

$$\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ng} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}.$$

Это я запишу по порядку так:

$$GH = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}.$$

Квадрат GH будет

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{2}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nn\,y_y}.$$

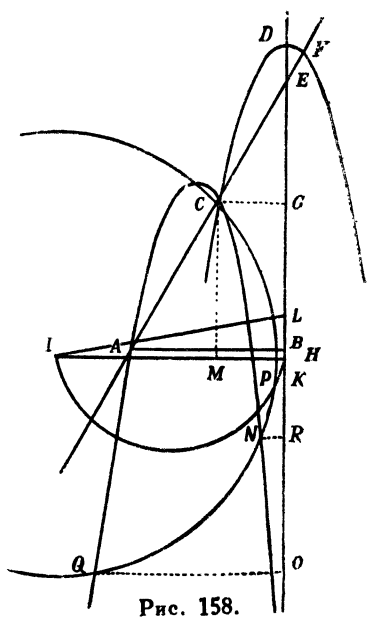


Рис. 158.

И в каком другом месте этой кривой мы бы ни вообразили себе точку C, в направлении ли N, или же в направлении Q, мы всегда найдем, что квадрат прямой, заключенной между точкой H и точкой, в которую падает перпендикуляр, опущенный из точки C на BH, всегда сможет быть выражен в тех же членах и с теми же знаками + и —.

Затем, так как IH есть $\frac{m}{nn}$, а LH есть $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ и угол IHL прямой, то IL есть

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}.$$

Так как LP есть

$$\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$$

и угол IPL также прямой, то IP или IC есть

$$\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}}.$$

Опустим перпендикуляр CM на IH; IM будет разностью между IH и HM или CG, т. е. между $\frac{m}{nn}$ и y, и квадрат ее будет всегда

$$\frac{mm}{n^4}-\frac{2my}{nn}+yy.$$

Отняв это от квадрата IC, мы получим в остатке для квадрата CM, равного найденному уже квадрату GH, выражение

$$\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}-yy.$$

Или же, представив это выражение, как и выражение для квадрата GH, поделенным на $nnyy$, мы получим

$$\frac{-nny^4+2my^3-p\sqrt{v}\,yy-syy+\frac{tt}{4v}\,yy}{nnyy}.$$

Затем, восстанавливая

$$\frac{t}{\sqrt{v}}y^4+qy^4-\frac{1}{4}ppy^4 \text{ вместо } nny^4,$$

и

$$ry^3+2\sqrt{v}\,y^3+\frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3 \text{ вместо } 2my^3$$

и умножив оба выражения на $nnyy$, получим

$$y^6-py^5\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\+\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+2\sqrt{v}\\+\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\+\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy-ty+v$$

равным

$$\left.\begin{matrix}-\frac{t}{\sqrt{v}}\\-q\\+\frac{1}{4}pp\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+r\\+2\sqrt{v}\\+\frac{pt}{2\sqrt{v}}\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}-p\sqrt{v}\\-s\\+\frac{tt}{4v}\end{matrix}\right\}yy,$$

т. е. получим

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0.$$

Отсюда явствует, что CG, NR, QO и им подобные линии являются корнями этого уравнения, что и требовалось доказать [109].

Таким же образом, если желательно найти четыре средние пропорциональные между линиями a и b и если принять первую из них равной x, то получится уравнение

$$x^5 * * * * - a^4 b = 0$$

или же

$$x^6 * * * * - a^4 bx * = 0.$$

Положив $y - a = x$, мы найдем

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3 y^3 + 15a^4 yy \begin{matrix} -6a^5 \\ \\ -a^4 b \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ y \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} +a^6 \\ \\ +a^5 b \end{matrix} \Bigg\} = 0.$$

Поэтому нужно взять $3a$ для линии AB,

$$\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}} + 6aa}$$

для BK, или же для названной мной n прямой стороны параболы; $\frac{a}{3n}\sqrt{aa + ab}$ для DE или BL.

После того как в соответствии с мерой этих трех линий будет описана кривая ACN, нужно будет взять

$$LH = \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa + ab}},$$

$$HI = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa + ab} + \frac{18a^4 + 3a^3 b}{2nn\sqrt{aa + ab}}$$

и

$$LP = \sqrt{\frac{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa + ab}}{nn}}.$$

Действительно, окружность, имеющая центр в точке I, пройдет через найденную указанным путем точку P и пере-

сечет кривую в двух точках — C и N. Опустив из них на BK перпендикуляры NR и CG и отняв меньший, NR, от большего, CG, мы получим остаток x, первую из четырех искомых средних пропорциональных.

Аналогичным образом легко разделить угол на пять равных частей, вписать в круг фигуру с одиннадцатью или тринадцатью равными сторонами и придумать бесчисленное множество других примеров на это правило.

Следует, однако, заметить, что в некоторых из этих примеров может случиться, что окружность будет пересекать параболу второго рода столь наклонно, что окажется затруднительным установить их точку пересечения, так что такое построение будет практически неудобным. В таком случае легко помочь делу, установив наподобие приведенного другие правила, что можно осуществить множеством способов.

Однако в мои цели не входит написать большую книгу. Я скорее стремлюсь в немногих словах выразить многое. С тем, что я так и сделал, может быть, согласятся, обратив внимание на то, что, приведя все задачи одного рода к одному построению, я вместе с тем дал способ приводить их к бесчисленному множеству других, отличных, и решать каждую из них бесчисленным множеством способов. После того как я дал построение всех плоских задач посредством пересечения прямой линии и окружности, всех телесных — посредством пересечения снова окружности и параболы и, наконец, всех задач, на одну степень более сложных, — посредством пересечения опять-таки окружности и линии, на одну степень более сложной, чем парабола, — для построения все более и более, вплоть до бесконечности, сложных задач, нужно лишь следовать по тому же пути. Действительно, имея два или три первых члена математической прогрессии, нетрудно найти все остальные. И я надеюсь, что наши потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им самим удовольствие найти это.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСЛЕСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В феврале 1950 г. исполнилось триста лет со дня смерти Декарта. По предложению безвременно скончавшегося академика С. И. Вавилова, поддержанному Комиссией Академии Наук СССР по истории физико-математических наук, был предпринят полный перевод произведения Декарта „Рассуждение о методе“ (Discours de la Méthode) вместе с его приложениями — „Диоптрикой“ (Dioptrique), „Метеорами“ (Météores), „Геометрией“ (Geométrie).

Само „Рассуждение о методе“ (без приложений) переводилось на русский язык неоднократно. Первый из этих переводов, наиболее близкий к оригинальному тексту Декарта, принадлежит профессору Московского университета, историку физики Н. А. Любимову, однако чрезмерное подражение оригиналу, вплоть до архаичности языка и сохранения необычайно длинных предложений французского философа, весьма затрудняет чтение этого перевода. Несколько новых переводов, выполненных впоследствии другими авторами, наоборот, легко читаются, но местами значительно отходят по смыслу от оригинала.

К сожалению, остались непереведенными приложения к „Discours de la Méthode“, „Dioptrique“ и „Météores“, т. е. как раз тот материал, который послужил автору в качестве иллюстрации или, точнее, в качестве основы для разработки самого метода. Известно, что „Рассуждение о методе“ было составлено лишь после того, как были закончены „Диоп-

трика", „Метеоры" и „Геометрия". К тому же эти приложения составляют, пожалуй, наиболее крупный вклад Декарта в точное естествознание, находившееся тогда в самом начале своего развития.

При жизни автора было выпущено в свет (Яном Мэром в Лейдене, в 1637 г.) всего одно издание — „Discours de la Méthode".

Семь лет спустя Эльзевиром в Амстердаме был издан выполненный Э. де Курселем перевод на латинский язык „Discours de la Méthode" и „Essais" (за исключением „Géométrie", которая была отдельно переведена Скаутеном на латинский язык). Этот перевод был просмотрен Декартом; он ввел, помимо стилистических исправлений, небольшое число добавлений.

Настоящий перевод выполнен с французского текста, но с учетом дополнений, имеющихся в латинском переводе; последний использовался также в сомнительных местах оригинала.

Перевод дополнен примечаниями и тремя статьями, посвященными отдельным частям произведения Декарта.

Переводы „Discours de la Méthode", „Dioptrique" и примечания к ним выполнены Г. Г. Слюсаревым, перевод „Géomètrie", а также примечания к ней сделаны А. П. Юшкевичем. В переводе „Dioptrique" принимал участие А. Г. Перов.

Статьи „Философское учение Ренэ Декарта", „Декарт и оптика XVII века" и „О «Геометрии» Декарта" составлены соответственно Т. И. Ойзерманом, Г. Г. Слюсаревым и А. П. Юшкевичем.

Иллюстрации заимствованы из французского издания Адама и Таннери (Париж, 1898), в точности воспроизведшего рисунки оригинального издания Я. Мэра. В настоящем издании сохранен встречающийся у Мэра обычай повторять один и тот же рисунок на разных страницах (удобный для читателя), если в них делается ссылка на этот рисунок. Однако в отличие от Мэра все рисунки в данной книге перенумерованы.

ФИЛОСОФСКОЕ УЧЕНИЕ РЕНЭ ДЕКАРТА

Французский философ, математик, естествоиспытатель Ренэ Декарт был одним из основоположников науки и, в частности, философии нового времени. Его учение было идейным знаменем антифеодальной борьбы на заре капиталистического развития. Это было время, когда открытие Америки и морского пути вокруг Африки „создало для подымающейся буржуазии новое поле деятельности. Ост-индский и китайский рынки, колонизация Америки, обмен с колониями, увеличение количества средств обмена и товаров вообще дали неслыханный до тех пор толчок торговле, мореплаванию, промышленности и тем самым вызвали в распадавшемся феодальном обществе быстрое развитие революционного элемента“.[1] Буржуазия, стремившаяся к развитию производительных сил, нуждалась в науке, которая бы исследовала свойства физических тел и формы проявления сил природы. „До того же времени, — говорит Энгельс, — наука была смиренной служанкой церкви, и ей не позволено было выходить за рамки, установленные верой... Теперь наука восстала против церкви; буржуазия нуждалась в науке и приняла участие в этом восстании“.[2]

Вместе с развитием мореходства, ткацкого и часового дела, металлургии, красильной промышленности и т. п. развивались

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс. Манифест коммунистической партии. Госполитиздат, 1951, стр. 33.

[2] К. Маркс и Ф. Энгельс, Избранные произведения, т. II. Госполитиздат, 1948, стр. 93.

астрономия, механика, математика, физика, анатомия и другие науки.

Великий польский ученый Н. Коперник провозгласил в 1543 г. новое, гелиоцентрическое миропонимание, явившееся революционным актом, посредством которого естествознание впервые заявило о своей независимости от теологии. Д. Бруно — неустрашимый проповедник гелиоцентрического учения — разрабатывал облеченный в пантеистическую форму материализм и третировал схоластов, именуя их „бездельниками, педантами, жуликами, шутами, шарлатанами". Галилей разработал основы теоретической механики. Кеплер открыл законы движения планет вокруг Солнца. Телескоп и микроскоп гигантски раздвинули сферу научных исследований. Т. Мор и Т. Кампанелла выступили с первыми социалистическими утопиями.

В этих условиях возникла философия Ренэ Декарта, который, как правильно отмечает руководитель французской коммунистической партии Морис Торез, „воплотил интеллектуальное устремление и дерзания поднимающейся прогрессивной буржуазии".[1]

В первой половине XVII в. — время жизни Декарта — Франция переживала процесс, охарактеризованный Марксом как „первоначальное накопление капитала, т. е. его исторический генезис".[2] Феодальные отношения все еще господствовали, особенно в деревне. Однако развитие производительных сил и связанного с ними общественного разделения труда, распространение товарно-денежных отношений, разложение, в основном, натурального хозяйства, превращение натуральных крестьянских повинностей в денежные, классовая дифференциация в среде крестьянского населения, налоговый гнет — все это с неизбежностью вело к экспроприации мелкого производителя и превращению его в наемного раба

[1] La nouvelle critique, revue du marxisme militant, sept.—oct. 1950, стр. 121.

[2] К. Маркс. Капитал, т. I. Госполитиздат, 1952, стр. 764.

капитала. „Экспроприация непосредственных производителей, — говорит Маркс, — производится с самым беспощадным вандализмом и под давлением самых подлых, самых грязных, самых мелочных и самых бешеных страстей. Частная собственность, добытая трудом собственника, основанная, так сказать, на срастании отдельного независимого работника с его орудиями и средствами труда, вытесняется капиталистической частной собственностью, которая покоится на эксплуатации чужой, но формально свободной рабочей силы“.[1]

Вместе с возрастанием товарности крестьянского хозяйства происходило усиление эксплоатации массы крестьян со стороны помещиков, ростовщиков, купеческого капитала. Государственные налоги с крестьян, составлявшие, по существу, централизованную феодальную ренту и важный источник дохода высшего дворянства, служившего при королевском дворе и в армии, непрерывно возрастали. Налоговая система весьма способствовала разорению непосредственного производителя. Королевское правительство продавало кредитовавшим его буржуа право взимания налогов. Государственный долг делается одним из сильнейших рычагов первоначального накопления. Откупщики выкачивали из трудящихся значительно бо́льшие суммы, чем те, которыми они ссужали монархию. Продавались не только права на взимание налогов, но и государственные должности, а также дворянское звание. Откупа и титулы доставались, главным образом, верхнему слою буржуазии: банкирам, откупщикам налогов, акционерам привилегированных торговых компаний. Наряду с дворянством шпаги (старым потомственным дворянством), приходившим во все больший упадок и жившим в значительной мере на подачки двора, умножалось, в гораздо большей мере, чем в XVI в., чиновничество, образовавшее особую касту, буржуазную по происхождению, но по положению близкую к дворянству.

---

[1] К. Маркс. Капитал, т. I. Госполитиздат, 1952, стр. 765.

Наиболее интенсивно развивались капиталистические отношения в городах, где концентрировалось мануфактурное производство, все более и более подчинявшее себе ремесленников. Предприниматели, владельцы мануфактур, оптовые и розничные торговцы требовали ликвидации цехов, внутренних таможенных пошлин и других феодальных препон развитию промышленного производства. Эти буржуазные круги требовали от правительства поощрительной протекционистской политики.

Политическим выражением упадка феодальных сеньерий и развития экономического могущества буржуазии явилось утверждение абсолютной монархии, которая во времена Декарта достигает расцвета.

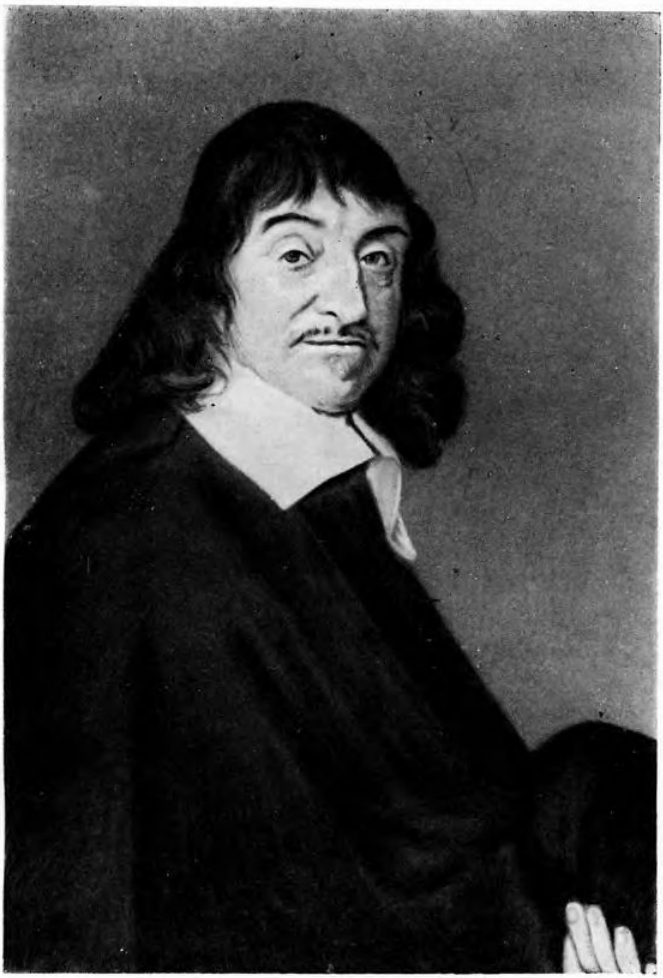
„... *абсолютная монархия*, — говорит Маркс, — возникает в переходные эпохи, когда старые феодальные сословия разлагаются, а средневековое сословие горожан складывается в современный класс буржуазии, и ни одна из спорящих сторон не взяла еще перевеса над другой. Таким образом, элементы, на которых зиждется абсолютная монархия, ни в коем случае не являются ее продуктом, наоборот, они образуют ее социальную основу...“.[1]

Энгельс указывает, что абсолютизм представляет собой государственное выражение компромисса между дворянством и буржуазией, временно устраивающее и тот и другой класс. „При этом, — указывает Энгельс, — на долю дворянства, отстраненного от политических дел, выпадает грабеж крестьян, государственной казны и косвенное политическое влияние через двор, армию, церковь и высшую администрацию; на долю буржуазии — покровительственные пошлины, монополии и *относительно* упорядоченное управление и судопроизводство“.[2]

Неограниченная монархия выражала общие интересы всего дворянского сословия (и духовенства) в противовес сепаратистским тенденциям его аристократической верхушки. Абсо-

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. V, стр. 212.

[2] К. Маркс и Ф. Энгельс, Избранные письма. 1948, стр. 407.



РЕНЕ ДЕКАРТ

С портрета Франса Гальса (Париж. Лувр).

лютизм защищал буржуазию от произвола дворянства и поощрял промышленное развитие и торговлю. Государственные налоги, доведенные до предела абсолютной монархией, являлись одним из важнейших факторов первоначального накопления капитала. Наконец, бюрократически-военный централизованный государственный аппарат, созданный абсолютизмом, выражая общие интересы всех эксплоататорских классов, подавлял многочисленные восстания крестьянства и городского плебса, прогрессирующее ограбление которых, с одной стороны, поддерживало существование привилегированных сословий, а с другой, — питало капиталистическое развитие Франции.

Десятки крупных и мелких восстаний происходят в различных местностях Франции на протяжении всей первой половины XVII в. Недаром один из интендантов сообщал правительству о крестьянах: „Как только они видят налогового пристава, они тотчас берутся за оружие". Восстания, носившие преимущественно антиналоговый характер, по существу были направлены против абсолютизма и поддерживавших его дворянства и буржуазии. Крупнейшее из этих восстаний — восстание так называемых „босоногих", происходившее в Нормандии в 1639 г., — потребовало от правительства значительных средств и усилий для подавления. Не только в деревнях, но и в Париже, Бордо, Марселе, Лионе, Орлеане, Руане, Амьене, Дижоне и других городах Франции периодически происходят восстания городских „низов". Все эти восстания вынуждали и дворянство и буржуазию объединяться, несмотря на разделявшие их противоречия, вокруг абсолютизма, укрепление которого служило гарантией существования всех имущих классов.

Французская буржуазия первой половины XVII в. еще не стремилась непосредственно к завоеванию власти. Она хотела лишь равенства прав со „старшими братьями" (сословиями), как оскорбительно для дворянского слуха выражались представители буржуазии и чиновничества.

Абсолютизм поощрял развитие капиталистического производства. Маркс следующим образом характеризует роль абсолютной монархии в развитии капитализма: „Нарождающейся буржуазии нужна государственная власть, и она действительно применяет государственную власть, чтобы «регулировать» заработную плату, т. е. принудительно удерживать ее в границах, благоприятствующих выколачиванию прибавочной стоимости, чтобы удлинять рабочий день и таким образом удерживать самого рабочего в нормальной зависимости от капитала. В этом существенный момент так называемого первоначального накопления“.[1]

Ришелье — могущественный первый министр французской абсолютной монархии (1624—1642) — субсидировал крупные мануфактуры, заморские компании, колониальные экспедиции, строительство дорог, каналов и рекомендовал королю „даровать торговле некую прерогативу“. По инициативе государственной власти создавались промышленные предприятия, которые обеспечивались всякого рода привилегиями, гарантиями, монополиями. Для поощрения отечественного производства и защиты его от голландской и английской конкуренции правительство осуществляло протекционистскую политику. „Система протекционизма, — указывает Маркс, — была искусственным средством фабриковать фабрикантов, экспроприировать независимых рабочих, капитализировать национальные средства производства и средства к жизни, насильственно сокращать переход от старого способа производства к современному“.[2]

Все вышеуказанные особенности первоначального накопления капитала во Франции вполне объясняют, почему буржуазия, развивавшаяся в недрах феодального экономического строя, революционизируя общественное производство, оставалась вместе с тем в течение долгого времени политически

---

[1] К. Маркс. Капитал, т. I. Госполитиздат, 1952, стр. 741.

[2] Там же, стр. 760.

консервативной. Декарт, будучи идеологом французской буржуазии этой эпохи, отразил в своей философии всю ее двойственность.

Ренэ Декарт решительно выступил против господствовавшего в его время схоластического мировоззрения. В своем произведении „Рассуждение о методе“ он иронически утверждал, что современная ему философия „дает средство говорить правдоподобно о всевозможных вещах и удивлять мало сведущих (13),[1] что вообще „нельзя придумать ничего столь странного и невероятного, что не было бы уже высказано кем-либо из философов“ (20). Неудивительно поэтому, — отмечает Декарт, — что люди, более всего занимающиеся философией, часто менее мудры и не столь правильно пользуются своим рассудком, чем те, которые никогда не посвящали себя философским занятиям. В этом же произведении Декарт утверждал, в противовес высокомерию аристократов, что способность отличать истину от заблуждения, здравомыслие или разум „от природы одинакова у всех людей“ (10), что гораздо более истины в повседневных рассуждениях обычного человека „касательно непосредственно интересующих его дел, исход которых немедленно накажет его, если он неправильно рассудил, чем в кабинетных соображениях образованного человека, не завершающихся действием“ (16), и подчеркивал поэтому, что свое „Рассуждение о методе“ он преднамеренно написал не по-латыни, а по-французски, „на языке моей страны“ (66). Декарт настаивал на необходимости отделаться от всех принятых на веру мнений и, выступая против господствовавшей во Франции религиозной нетерпимости, против санкционированных авторитетом церкви догматов, говорил, что „люди, имеющие понятия, противоречащие нашим, не являются из-за этого варварами или дикарями, и многие из них так же или даже более разумны, чем мы“ (20—21). Декарт отверг

[1] Цифры в круглых скобках означают страницы настоящего издания.

схоластическую ученость, которая, по его мнению, делает людей менее способными к восприятию доводов разума и игнорирует данные повседневного опыта и все знания, не освященные церковной или светской властью. Обращаясь к „великой книге мира“, т. е. к природе, он вслед за Бэконом провозгласил необходимость создания такой философии, которая служила бы практике, увеличивая господство человека над силами природы. Он утверждал, что „вместо умозрительной философии, преподаваемой в школах, можно создать практическую, с помощью которой, зная силу и действие огня, воды, воздуха, звезд, небес и всех прочих окружающих нас тел, так же отчетливо, как мы знаем различные ремесла наших мастеров, мы могли бы наравне с последними использовать и эти силы во всех свойственных им применениях и стать, таким образом, как бы господами и владетелями природы“ (54).

И. В. Сталин в своем классическом труде „Экономические проблемы социализма в СССР“ показывает, что прогрессивные общественные классы использовали в интересах общественного развития экономические законы, поскольку интересы этих классов совпадали с объективной исторической необходимостью.[1] Положения Декарта, обосновывающие необходимость создания условий, благоприятствующих дальнейшему развитию производства, овладению стихийными силами природы, выражали стремление буржуазии XVII в. привести производственные отношения в соответствие с новыми производительными силами.

Глубоко прав Морис Торез, подчеркивавший в своей произнесенной в Сорбонне в 1946 г. речи революционный смысл положения Декарта о всемогуществе человеческого разума, который характеризовался великим французским ученым как „всеобщее оружие“, с помощью которого можно не только

---

[1] И. В. Сталин. Экономические проблемы социализма в СССР. Госполитиздат, 1952, стр. 49—50.

познавать окружающие явления, но и улучшить человеческую жизнь. Реакционность современной буржуазии ярко проявляется в том, что она принижает мышление, оплевывает разум, подобно тому как это делали средневековые мракобесы.

Ренэ Декарт ополчался против средневекового мракобесия, провозглашая разум великой человеческой силой, перед которой открываются все тайны вселенной. Совершенно несомненно, что „естественный свет разума", о котором постоянно говорит Декарт, объективно, независимо даже от намерений мыслителя, противопоставлялся откровению, религиозным догматам, мистицизму, ссылающемуся на сверхъестественный источник знания. Рационализм Декарта был философской идеологией буржуазии, революционизирующей общественное производство, открывающей перед ним новые исторические перспективы. „Я показал, — писал Декарт, — как горы, моря, родники и реки могли образоваться *естественным путем* (разрядка наша, — *Т. О.*), как металлы — появиться в недрах земли, растения — возрасти на полях и вообще народиться все тела, называемые смешанными и сложными" (41—42).

Известно, что Декарт, ища наиболее подходящих для своей научной работы условий, покинул на двадцать лет Францию, где свирепствовала католическая иезуитская реакция, и поселился в Голландии, которая в XVII в. была образцовой капиталистической страной. Здесь, как писал он одному из своих друзей, „в толпе деятельного народа, более заботящегося о своих делах, чем любопытного к чужим, я могу, не лишая себя всех удобств большого города, жить в таком уединении, как в самой отдаленной пустыне" (32). Но и в Голландии, враждебной католицизму, Декарт подвергался преследованиям, учение его публично осуждалось, произведения запрещались, а автору приходилось прибегать к заступничеству французского посла.

Живя в Голландии, Декарт тем не менее был идеологом французской буржуазии, которая еще не была способна к завоеванию политической власти и, выступая против

старого способа производства, развивая новые производственные отношения, оставалась политически консервативной. Неудивительно поэтому, что в учении Декарта сочетается вера в могущество человеческого разума и враждебность к схоластическому мракобесию с традиционными религиозными верованиями и консерватизмом в области политики. Новатор в философии, великий муж науки разделял вместе со своими рядовыми современниками религиозные и политические предрассудки своего времени. Так, например, он писал, что его первым нравственным правилом было „повиноваться законам и обычаям моей страны, придерживаясь неотступно религии, в которой, по милости божьей, я был воспитан с детства, и руководствуясь во всем остальном мнениями наиболее умеренными, чуждыми крайностей и общепринятыми среди наиболее благоразумных людей, в кругу которых мне придется жить“ (26). Соответственно этому Декарт утверждал, что почти всегда несовершенства общественных порядков легче переносятся, чем их перемены, ввиду чего надлежит лишь постепенно, не ломая старого, осуществлять нововведения. При этом он, столь решительно выступивший против научных предрассудков своего времени, вполне одобрял политические предрассудки господствующих классов, заявляя, что он не одобряет „беспокойного и вздорного нрава тех, которые, не будучи призваны ни по рождению, ни по состоянию к управлению общественными делами, неутомимо тщатся измыслить какие-нибудь новые преобразования“ (19—20).

Общеизвестно, что Декарт предпочитал выступать в печати под псевдонимом и особенно опасался обвинений со стороны церкви. Он отказался даже от опубликования подготовленного им труда, узнав об осуждении Галилея как сторонника Коперника, из учения которого исходил и Декарт. В своих „Началах философии“ он даже утверждал, что „не воспользовался ни одним началом, которое не было бы принято и одобрено Аристотелем и всеми остальными философами всех времен; поэтому моя философия вовсе не нова,

она наиболее древняя и общераспространенная".[1] Однако все эти личные качества, свидетельствующие о чрезвычайной осторожности Декарта, нисколько, конечно, не объясняют основных черт его философского учения. Дуалистический характер учения Декарта, сосуществование в нем прогрессивных и консервативных черт объяснялись социальными условиями того времени, положением французской буржуазии в период первоначального накопления капитала, кризиса феодальной системы и развития абсолютистского централизованного государства.

Ренэ Декарт является классическим представителем дуализма. Его философская система разделяется на „метафизику" и „физику" (природоведение), где метафизика является идеалистическим учением, а физика имеет по существу материалистический характер. В своей материалистической части философия Декарта противопоставлялась ее создателем основанному на христианском догматическом вероучении теологическому идеализму, который проповедовался во Франции господствовавшей реакционной схоластической философией. Декарт был противником этой средневековой философии, которая повсеместно преподавалась в его время. Он утверждал, как уже подчеркивалось выше, что схоластическая философия извращает „естественный свет разума", ввиду чего именно те, которые меньше всего ее изучали, наиболее способны постигнуть подлинную философию. Эта часть философского учения Декарта была продиктована стремлением молодой тогда еще французской буржуазии отвоевать у теологии, у схоластики природоведение, с тем чтобы построить его на материалистических началах. Именно поэтому Декарт стал ближайшим предшественником французского материализма XVIII в., на что указали Маркс и Энгельс в „Святом семействе".

Но в то же время как дуалист Декарт признавал существование двух субстанций — материальной и духовной, а

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 536.

соответственно этому необходимость двух, в корне отличающихся друг от друга исходных принципов исследования: поскольку речь идет о материальных явлениях, они должны быть объяснены из их материальной основы, поскольку же изучается психика, она может быть понята лишь из якобы лежащей в ее основе духовной субстанции. Больше того, Декарт утверждал, что и материальная и духовная субстанции были созданы богом, который, правда, в дальнейшем уже не вмешивается в дела вселенной.

Реакционная буржуазная философия эпохи империализма неоднократно выступала с тупоумной претензией подняться „выше" материализма и идеализма, преодолеть эти якобы устаревшие и „односторонние" противоположности и создать учение, которое было бы и не материалистическим, и не идеалистическим. Как показал В. И. Ленин в своем гениальном труде „Материализм и эмпириокритицизм", буржуазная претензия „превзойти" материализм и идеализм для отыскания третьего пути является в сущности лишь завуалированной попыткой обновления идеализма, изрядно дискредитированного в связи с новыми данными науки и практики. Дуализм Декарта не имеет ничего общего с подобными шарлатанскими попытками, свойственными современным философствующим оруженосцам империалистической буржуазии. Декарт не претендовал на „синтез" материализма и идеализма; не сумев провести материализм в понимании психических явлений, он старался отделить учение о природе (физику) от идеалистического учения о сверхприродном (метафизики). При этом учение о природе занимает в его философии главное место, как это будет показано ниже.

Современные буржуазные исследователи философии Декарта, вроде Ж. Шевалье, Ж. Лапорта, А. Койра и других, всячески тщатся свести философию Декарта к одной лишь метафизике, т. е. к идеализму, рассматривая физику Декарта как что-то вообще не относящееся к философии.

Так, Ж. Лапорт в весьма объемистой работе „Рационализм Декарта“ обходит молчанием материалистическое учение Декарта о природе, стремясь убедить читателя, будто великий французский мыслитель занимался лишь доказательством бытия бога и бессмертия души и именно для этого разрабатывал свой знаменитый метод. То же утверждает и Шевалье, который в своей переизданной в 1949 г. книге „Декарт“ посвящает физике Декарта лишь одну небольшую главу, рассматривая ее вместе с аналитической геометрией как свидетельство того, что Декарт был не только философом, но и ученым в специальных, нефилософских областях знания. Само собой разумеется, что подобное истолкование учения Декарта необходимо современным фальсификаторам истории философии для того, чтобы замаскировать характерное для Декарта материалистическое понимание явлений природы.

На самом же деле Декарт, неоднократно подчеркивавший значение развиваемых им взглядов для успеха практической деятельности людей, считал свою натурфилософию главным достижением созданного им метода исследования. Сам Декарт, характеризуя свою философию, писал: „Вся философия подобна как бы дереву, корни которого — метафизика, ствол — физика, а ветви, исходящие от этого ствола, — все прочие науки, сводящиеся к трем главным: медицине, механике и этике“.[1] Как мы видим, Декарт рассматривает философию как всеобъемлющую науку, включающую в себя все важнейшие области знания. Высоко оценивая метафизику, которая, по его мнению, призвана открыть начала и первопричины всего, что существует и может существовать в мире, Декарт видит в ней лишь исходный пункт своей философии, в то время как физика и ее порождения составляют, по его мнению, содержание всех многообразных человеческих знаний. Это делает понятным следующее его утверждение: „Подобно тому как плоды собирают не с корней и не со ствола дерева,

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 421.

а только с концов его ветвей, так и особая полезность философии зависит от тех ее частей, которые могут быть изучены только под конец".[1]

Марксизм учит отличать объективное содержание философских учений от той субъективной формы, в которой они изложены. Это одно из основных требований материалистического понимания развития философских идей. Игнорирование этого требования приводит к грубейшим ошибкам вроде зачисления Спинозы в лагерь протестанской теологии. Следуя этому, направленному против поверхностно эмпиристских оценок явлений требованию марксизма, можно с уверенностью сказать, что не „Метафизические размышления" образуют главное в учении Декарта, а его метод и учение о природе. Именно поэтому Декарт считал гелиоцентрическую систему Коперника основой своей философии, в связи с чем он писал после осуждения Галилея папской инквизицией: „Я сознаюсь, что если это учение ложно, то ложны и все основания моей философии, так как они взаимно опираются друг на друга. Это учение находится в такой тесной связи со всеми частями моей философии, что я не могу отказаться от него, не изуродовав всего остального" („Correspondance" за 1638 г.).

Достаточно самого беглого ознакомления с „метафизикой" Декарта, с его доказательствами бытия бога и бессмертия души, чтобы стало очевидно, что в этих вопросах он повторяет традиционную схоластическую аргументацию, не претендуя на новаторство, о чем и сам он говорит в своем обращении к декану и докторам богословского факультета Сорбонны, — обращении, которым открываются „Метафизические размышления". Впрочем, богословский факультет Сорбонны, как и следовало ожидать, отказался одобрить „Метафизические размышления" Декарта, поскольку они содержали наряду с традиционными сентенциями о боге и душе столь высокую оценку разумных способностей человека, которая объективно

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 421.

носила антитеологический характер. А между тем в этом произведении он почти дословно повторяет знаменитое онтологическое „доказательство“ бытия божия, данное Ансельмом Кентерберийским, утверждая, что „из одного лишь присутствия во мне идеи вещи более совершенной, чем я, следует, что эта вещь действительно существует“,[1] поскольку „я, существо конечное, не обладал бы идеей субстанции бесконечной, если бы она не была вложена в меня какой-нибудь действительно бесконечной субстанцией“.[2]

Уже современники Декарта, в том числе такие выдающиеся материалисты, как Гоббс и Гассенди, отмечали несостоятельность и неоригинальность этого положения Декарта, с помощью которого с таким же основанием, т. е., в сущности, без всякого основания, можно доказать бытие совершенного острова и т. д. Попытка Декарта показать, что его „доказательство“ бытия божия отличается от аналогичного рассуждения Ансельма не убедила его оппонентов.

Столь же традиционный характер носит предлагаемое Декартом „доказательство“ существования бессмертной души. Он говорит о том, что душа, в отличие от материи, неделима, не состоит из частей, на которые она могла бы разложиться, что свидетельствует де о том, что „наша душа имеет природу, совершенно не зависимую от тела и, следовательно, не подвержена смерти одновременно с ним“ (53). Подобные аргументы известны были, пожалуй, всем преподавателям философии и богословия, они были уже известны, конечно, Декарту и тогда, когда он обучался в иезуитской школе Ля-Флеш. Таким образом, все эти метафизические рассуждения Декарта (к ним следует отнести и положение о существовании врожденных идей, так же как и утверждение о том, что познание бога гораздо доступнее человеку, чем познание материального мира) составляют слабую сторону философии Декарта,

---

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 327.

[2] Там же, стр. 363.

теоретически выражают политическую консервативность тогдашней французской буржуазии.

Совершенно иная картина открывается перед нами, когда мы знакомимся с физикой Декарта, а также с основными положениями его рационалистического метода. Маркс и Энгельс писали по поводу учения Декарта о природе: „В своей *физике Декарт* приписывает *материи* самостоятельную творческую силу и *механическое* движение рассматривает как проявление жизни материи... *В границах* его физики *материя* представляет собой единственную *субстанцию*, единственное основание бытия и познания“.[1] Это положение основоположников марксизма раскрывает главное и решающее в философии Декарта, то, что делает его действительно великим мыслителем и зачинателем науки и философии нового времени. Вот почему Ленин, приводя это положение Маркса и развивая его, указывает: „*Декарт* в своей физике объявляет материю единственной субстанцией. Механический французский материализм берет физику Декарта и откидывает его метафизику“.[2]

Формулируя исходные принципы своего учения о природе, Декарт, как и почти все современные ему естествоиспытатели и даже философы материалистического направления, ссылается на бога как творца всего существующего. Однако эта ссылка носит общий и ни к чему не обязывающий характер. „Бог, — говорит он, — так чудесно установил эти законы, что даже при предположении, что он не создал ничего, кроме сказанного (т. е. материи вместе с присущим ей движением, — *Т. О.*), и не внес в материю никакого порядка и никакой соразмерности, а, наоборот, оставил только самый запутанный и невообразимый хаос, какой только могут описать поэты, то и в таком случае этих законов было бы достаточно, чтобы заставить частицы хаоса распутаться и расположиться в таком прекрасном порядке, что мир примет исключительно

---

[1] К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. III, стр. 154.
[2] В. И. Ленин. Философские тетради. 1947, стр. 29.

совершенную форму, в которой окажется не только свет, но и все прочее, как важное, так и неважное, имеющееся в действительном мире".[1] Этим самым, конечно, полностью отвергается и божественное предопределение и какой бы то ни было телеологизм. Декарт даже утверждал, что и такое существеннейшее свойство материи, как тяготение, может быть выведено из самой материи без допущения божественного [бытия. Неслучайно поэтому глава богословского факультета в Утрехте Воэций считал Декарта завзятым безбожником. Известно, что к Воэцию присоединились и другие реакционеры, вследствие чего не только в утрехтском, но и в лейденском университете было запрещено преподавание картезианского учения. А в 1663 г. произведения Декарта были внесены в папский индекс запрещенных книг, учрежденный еще в 1559 г. Формальное признание сотворения мира в его первоначальном (весьма несовершенном, как подчеркивает Декарт) виде сочетается у французского мыслителя с признанием безграничности вселенной, из чего логически следует ее несотворимость, ибо нельзя сотворить то, что не имеет ни начала, ни конца. Декарт утверждает, что „этот мир, или протяженная субстанция, составляющая его, не имеет никаких пределов для своего протяжения, ибо, даже придумав, будто существуют где-либо его границы, мы не только можем вообразить за ними беспредельно протяженные пространства, но и постигаем, что они действительно таковы, какими мы их воображаем".[2] Этот тезис нельзя рассматривать как случайно брошенную фразу, которой сам автор не придает особого значения. Совсем напротив, это положение прямо и непосредственно следует из того определения материи, которое дается Декартом. По его мнению, единственным атрибутом материи является протяженность. Все остальные чувственно воспринимаемые качества Декарт считает модусами,

---

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 195.
[2] Там же, стр. 476.

т. е. преходящими состояниями материи — возникающими и исчезающими.

Определение материи как протяжения сугубо механистично, ибо оно отвергает качественное многообразие, присущее материи, абсолютизирует количественную определенность материальных явлений и сводит их познание к одному лишь механическому описанию и математическому подсчету. Однако во времена Декарта эта механико-математическая трактовка материи играла прогрессивную роль. Достаточно указать хотя бы на то, что она позволяла нацело отвергнуть ставшее уже в это время совершенно схоластическим и бессодержательным представление об абсолютной пустоте, которого все еще придерживался Гассенди, несмотря на свой материализм. Декарт отвергал также, в противоположность своему современнику Гассенди, античное представление об атомах как якобы последних, неделимых элементарных частицах материи, условием существования которых является абсолютная пустота. Он доказывал, и это вытекало из выдвинутого им количественного определения материи, что любая частица материи бесконечно делима. Это положение Декарта несомненно носило прогрессивный характер, оно способствовало выработке научного представления об атоме, а также о молекуле, что было уже делом последующего научного развития. В этой связи нельзя не отметить выступления Декарта против игравшего не малую роль в тогдашнем естествознании схоластического аргумента о том, что природа якобы боится пустоты. Столь же решительно выступал Декарт против признаваемого многими учеными его времени actio in distans, т. е. воздействия одного тела на другое через пустоту, утверждая, что всякое тело воздействует на другое, сколь бы ни было оно от него отдалено, лишь через другие соприкасающиеся с ним тела, т. е. через определенную материальную среду.

Выдающейся исторической заслугой Декарта является связанная с даваемым им определением материи постановка

вопроса о материальном единстве мира. Декарт отвергает схоластическое противопоставление земного небесному, якобы состоящему из иных элементов, чем „тленная“ земля. Он уверенно заявляет, что „материя неба не разнится от материи Земли“, ввиду чего „во всем мире существует только одна материя“.[1] Не трудно понять, что это положение направлено против мистического раздвоения мира на посюстороннее и потустороннее, оно, следовательно, подрывает спиритуализм, одним из главных основоположников которого современные философствующее мракобесы считают Декарта.

Движение, согласно учению Декарта, представляет собой модус материи. Эта ограниченная, превзойденная в XVIII в. Толандом и французскими материалистами точка зрения несомненно вытекала из механико-математического представления о материи, фактически исключавшего анализ ее внутреннего состояния. Однако это же ограниченное механико-математическое определение материи как протяжения, исключающего пустоту, вело к признанию всеобщности движения. Для Демокрита, Эпикура и их французского последователя, Гассенди, предпосылкой движения было наличие пустоты, свободного, незанятого места. Декарт отверг эту теоретическую посылку, став на ту точку зрения, что движение одного тела предполагает перемещение другого, третьего и т. д., ввиду чего, по мнению Декарта, все всегда находится в движении, которое носит вихревой характер. Соответственно этому Декарт утверждал, что „в мире нет неподвижных точек“,[2] и вслед за Галилеем признавал относительный характер движения. Такое понимание движения наносило серьезный удар схоластическим представлениям, согласно которым нормальное состояние тела — покой, а движение представляет нарушение этого нормального состояния, ввиду чего каждое движущееся тело стремится к покою. Вопреки этому

---

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 476.

[2] Там же, стр. 471.

антинаучному представлению (кстати сказать, широко популяризируемому современными социологами американо-английской буржуазии) Декарт, исходя из принципа относительности движения, доказывал, что покой предполагает движение и, следовательно, также носит относительный характер.

Само собой разумеется, что речь идет исключительно о механическом движении, т. е. о перемещении тела в пространстве по отношению к другим телам. Как ни ограничена подобная трактовка движения, оставляющая без внимания качественное многообразие движения, его роль в качественном изменении, развитии материи, тем не менее в условиях XVII, да и XVIII вв. она была необходимой и прогрессивной ступенью развития познания. Энгельс говорит по этому поводу: „Само собою разумеется, что изучение природы движения должно было исходить от низших, простейших форм его и должно было научиться понимать их прежде, чем могло дать что-нибудь для объяснения высших и более сложных форм его. И действительно, мы видим, что в историческом развитии естествознания раньше всего разрабатывается теория простого перемещения, механика небесных тел и земных масс...“.[1]

Прогрессивность декартовского понимания движения в исторических условиях XVII в. станет особенно очевидной, если вспомнить, что схоласты признавали великое множество разнообразных „форм“ движения, исключающих перемещение тела в пространстве. Схоласты весьма невразумительно, что отмечает Декарт, определяли движение как „действие существа в возможности, и постольку, поскольку оно в возможности“, различали motus ad formam, motus ad calorem, motus ad quantitem (движение к форме, движение к теплоте, движение к количеству) и т. п., причем для каждого случая устанавливалось долженствующее его объяснить „скрытое“ качество, „тайная“ сила, „аппетит“. Все это было отвергнуто Декартом

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1952, стр. 44.

с помощью разработанного им научно-философского представления о механическом движении материи.

Отстаивая принцип неуничтожимости материи, ибо невозможно „предположить возникновение какой-либо вещи из ничего“ (34), Декарт приходит к признанию неуничтожимости движения материи. Выдвигая и обосновывая закон сохранения количества движения, Декарт теоретически обосновывает материализм нового времени. Правда, и здесь, как и в других случаях, он ссылается на бога, который „при сотворении материи наделил отдельные ее части различными движениями и сохраняет их все тем же образом и на основании тех самых законов, по каким их создал...“,[1] однако эта ссылка, еще раз свидетельствующая о дуализме Декарта, о теологической непоследовательности его мировоззрения, не умаляет значения установленного им материалистического принципа природоведения, согласно которому количество движения в природе не возрастает и не уменьшается, хотя в отдельных телах его может быть то больше, то меньше.

Средневековые схоласты признавали существование абсолютно отличных друг от друга в качественном отношении элементов, каковыми являлись, по их мнению, ртуть, сера, соль и т. д. Декарт решительно отвергает это воззрение, враждебно противостоящее материалистическому представлению о единстве мира. Однако механистическая математическая концепция природы не позволяет ему дать удовлетворительного объяснения качественному многообразию явлений природы. Не удивительно поэтому, что, по его мнению, существует всего лишь три элемента, различающиеся друг от друга главным образом формой и размерами своих частиц. Так, например, в одном из писем 1646 г. Декарт говорит, имея в виду средневековых алхимиков: „По моему мнению, их соль, сера и ртуть различаются между собой не более, чем четыре элемента философов, и не более, чем вода отличается

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 485—486.

от льда, пены и снега, ибо я считаю, что все тела состоят из одной и той же материи и ничто не отличает их между собой, за исключением того, что частицы материи, составляющие одно из этих тел, имеют иную фигуру или иначе расположены, нежели частицы, из которых состоят другие". Это положение Декарта наглядно характеризует его концепцию. Мы видим, как признание материального единства мира, будучи истолковано в механистическом духе, приводит философа к представлению о качественной однородности материи. Отвергая схоластические бесчисленные „материи", Декарт говорит, что материя всюду одна и та же. Свою крайне одностороннюю точку зрения он пытается подкрепить ярким сравнением воды, снега, льда, пены, представляющих различные формы проявления одного и того же вещества. Но в этом-то сравнении и обнаруживается метафизичность Декарта, сводящего все качественные различия к количественным и не видящего других проявлений качественного многообразия, кроме агрегатных состояний тел. Декарт утверждает, что все тела образуются из трех элементов: огня, воздуха и земли. Огонь „можно рассматривать как самую тонкую и самую пронизывающую жидкость на свете". Огонь состоит из мельчайших частиц, лишенных определенной величины или фигуры: „...все его частицы движутся с такой необычайной скоростью и так малы, что нет других тел, способных их задержать; кроме того, эти частицы не имеют определенной величины, фигуры или расположения".[1] Воздух характеризуется Декартом как „очень разбавленная жидкость", частицы которой, в отличие от огня, обладают определенной величиной и фигурой. Все частицы воздуха Декарт считает круглыми и сравнивает их с мельчайшими песчинками или пылинками. Он убежден, что этот второй элемент нигде в мире не существует в чистом виде, а всегда бывает с примесью некоторого количества материи первого элемента. Что ка-

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 190.

сается третьего элемента — земли, то Декарт говорит о ней следующее: „Я полагаю, что частицы ее настолько больше и движутся настолько медленнее в сравнении с частицами второго, насколько величина и движение частиц второго отличаются от величины и движения частиц первого. Я даже думаю, что достаточно рассматривать третий элемент как одну или много больших масс, частицы которых имеют очень мало движения или совершенно не имеют никакого движения, которое заставило бы их изменить положение в отношении друг к другу".[1]

Итак, элементы отличаются друг от друга прежде всего величиной, в связи с чем находится и присущая им скорость движения и даже фигура. Как ни наивно с точки зрения элементарнейшей химии это представление об элементах, берущее за исходное сложные, химически разложимые вещества, оно не лишено все же исторического значения. По мнению Декарта, вышеуказанные элементы существовали не всегда, они возникли в результате движения материи и трения друг о друга различных материальных масс. Но отсюда следует, что природа имеет свою историю, что солнечная система произошла из первоначального, недифференцированного состояния материи, еще не распавшейся на мелкие, средние и крупные частицы, образующие огонь, воздух и землю. Вихреобразное движение этой, выражаясь языком Канта, первоначальной туманности вызвало в связи с различием скорости в центре и на периферии образование элементов: из огня возникли солнце и звезды, из воздуха — небо, из земли — планеты и кометы. Такова космогоническая теория Декарта, представляющая собой первую крупную попытку исторического рассмотрения солнечной системы.

Декарт глубоко сознавал, насколько его космогония противоречит теологической концепции сотворения мира, насколько идея развития враждебна идее божественного творения. Поэтому, очевидно, он счел необходимым оговориться,

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 189.

что выдвигаемая им космогоническая теория имеет своей целью лишь объяснение строения природы и ее многообразных явлений, для чего все эти явления условно рассматриваются как образовавшиеся в ходе более или менее длительного изменения, развития. Природа этих явлений, — подчеркивал Декарт,— „гораздо легче познается, когда мы видим их постепенное развитие, чем когда рассматриваем их как вполне уже образовавшиеся“ (42). В другом месте Декарт утверждает: „...я не сомневаюсь в том, что мир изначально создан был во всем своем совершенстве, так что тогда же существовали Солнце, Земля, Луна и звезды; на Земле не только имелись зародыши растений, но и сами растения покрывали некоторую ее часть; Адам и Ева были созданы не детьми, а взрослыми“. Тем не менее, — продолжает далее Декарт, — „мы лучше разъясним, какова вообще природа всех сущих в мире вещей, если сможем вообразить некоторые весьма понятные и весьма простые начала, исходя из коих мы ясно сможем показать происхождение светил, Земли и всего прочего видимого мира как бы из некоторых семян; и хотя мы знаем, что в действительности все это не так возникло, мы объясним все лучше, чем описав мир таким, каков он есть или каким, как мы верим, он был сотворен“.[1]

Едва ли может быть сомнение в том, что это утверждение Декарта относительно условности принципа развития является лишь уловкой, маскировкой действительных взглядов. Идея развития в учении Декарта неразрывно связана с его представлением об элементах и свойственных им различиях. Однако эта идея развития не выходит у Декарта за пределы метафизической концепции, с характерным для нее односторонним представлением об изменении как об увеличении или же уменьшении того, что существовало и раньше. Декарт далек от научного понимания качественного изменения на основе постепенных количественных изменений, приводящих к прерыву непрерывности, скачку. Однако в XVII в., когда наука,

[1] Рене Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 510—511.

по словам Энгельса, еще глубоко увязала в теологии, идея возникновения и развития солнечной системы даже в этой своей ограниченной форме имела революционное значение.

Правда, космогоническая теория Декарта не могла удовлетворительно объяснить имевшиеся уже в его время данные о строении солнечной системы, особенностях движения планет вокруг Солнца и т. д. Поэтому гипотеза Декарта не получила признания и в среде передовых естествоиспытателей того времени, далеко не чуждых идее развития. Тем не менее сама постановка вопроса о возникновении и развитии солнечной системы сыграла выдающуюся роль в исторической подготовке канто-лапласовской космогонической гипотезы.

Отмечая, что приведенная выше фраза Декарта об условности принципа развития является не более чем маскировкой, применявшейся в тех или иных случаях по существу всеми прогрессивными деятелями науки XVII в., следует также указать, что в этом положении Декарта содержится и вполне рациональное указание на познавательное значение принципа развития. Декарт утверждает, что для глубокого понимания сущности изучаемых явлений необходимо их рассматривать не как готовые, раз навсегда данные вещи, а как нечто возникшее и лишь в результате многообразных изменений ставшее таковым. Это гносеологическое истолкование идеи развития является одной из глубоких диалектических догадок Декарта.

Физика Декарта не ограничивается одной лишь неорганической природой, в ней содержится замечательная для своего времени попытка натуралистического объяснения сущности жизни. Декарт по существу первый в истории науки предпринял попытку, правда, весьма не совершенную вследствие своей сугубой механистичности, объяснить жизнедеятельность животных, исходя из представления о взаимодействии их органов по общим законам неживой природы, что нанесло ощутимый удар спиритуалистическому противопоставлению живого и неживого. Рассматривая природу как самодействующую машину, своеобразный автомат, он распространяет это

представление на все живое, в том числе и на человека, исключая присущую последнему сознательную деятельность. Речь идет, таким образом, о внутреннем, объективном, независимо от сознания совершающемся физиологическом механизме. Так, характеризуя жизнедеятельность животных, он отмечает, что „природа в них действует сообразно расположению их органов, подобно тому как часы, состоящие только из колес и пружин, точнее показывают и измеряют время, чем мы со всем нашим разумом“ (52). Декарт приходит к выводу, что „если бы существовали такие машины, которые имели бы органы и внешний вид обезьяны или другого неразумного животного, то мы не имели бы никакого средства узнать, что они не той же природы, как эти животные (50).

Это рассуждение Декарта опиралось на естественно-научные открытия его времени, в частности, на открытие системы кровообращения, сделанное Гарвеем. Декарт в своем „Рассуждении о методе“показывает, что система кровообращения представляет определенный, действующий автоматически, совершенно независимо от сознания, механизм; с аналогичной точки зрения он рассматривает другие формы жизнедеятельности. Однако главным теоретическим источником подобного представления о машинообразности физиологических актов служили, конечно, данные механики. Следствием этого явилось упрощенное и иногда даже фантастическое объяснение некоторых физиологических процессов, например того же кровообращения. Не имея представления о биохимическом процессе и специфическом, свойственном лишь живому организму обмене белковых веществ, Декарт объясняет физиологические процессы различными механическими сочетаниями все тех же пресловутых трех элементов — огня, воздуха и земли. Поэтому и получается у него, что движущей силой кровообращения оказывается мифический „тончайший ветер“, который „как в высшей степени чистое и подвижное пламя, постоянно в большом количестве восходит от сердца к мозгу, а оттуда через нервы к мускулам и приводит члены в движение“ (49).

Характеризуя социальный источник картезианского механицизма, Маркс говорит: „...Декарт, с его определением животных как простых машин, смотрит на дело глазами мануфактурного периода в отличие от средних веков, которым животное представлялось помощником человека...“.[1]

Развитие механики, из которой исходил Декарт в объяснении немеханических явлений, базировалось на развитии капиталистического производства. В этом прогрессивное для XVII—XVIII вв. значение механистического истолкования неживой и живой природы, свойственного всем передовым мыслителям того времени. Во времена Декарта противники механистического истолкования природы находились в лагере реакции и критиковали механистицизм справа, противопоставляя ему теологическое, в особенности телеологическое, истолкование явлений.

Историческое значение картезианского представления о животных как простых машинах заключалось в том, что в нем впервые в истории содержится научная догадка о действительном, рефлекторном механизме, присущем живым существам. Конечно, правильное понимание рефлекса невозможно на базе механики, исключающей выявление специфики живого организма. Однако поскольку высшие формы движения материи не исключают, а включают в себя и механическое движение, постольку эта научная догадка имела фактическое основание. Декарт распространял выработанное естествознанием понятие естественной причинности на поведение животных, реагирующих определенным образом на столь же определенные воздействия внешней среды. Как отмечает великий русский физиолог И. П. Павлов, высоко ценивший научное наследие Декарта, „именно идея детерминизма составляла для Декарта сущность понятия рефлекса, и отсюда вытекало представление Декарта о животном организме как о машине“.[2]

---

[1] К. Маркс. Капитал, т. I. Госполитиздат, 1952, стр. 396.

[2] И. П. Павлов, Избранные произведения, Госполитиздат, 1951, стр. 381.

Однако и в этих представлениях Декарта проявилась его теологическая непоследовательность, связанная с дуализмом.

Выше уже указывалось, что естественному, без божественного вмешательства происходящему, процессу взаимодействия явлений природы Декарт предпосылает утверждение о сотворении материи и движения богом. Точно так же материалистическое истолкование жизнедеятельности Декарт ограничивает лишь теми движениями, которые, как говорит он, происходят независимо от мышления и воли. Что же касается актов мышления и воли, то здесь надо, по его мнению, допустить независимую от тела, нематериальную душу. В конечном счете метафизика Декарта врывается здесь в область физики, и Декарт в сущности отказывается от научного объяснения высших психических функций человека. Вместо рационального объяснения этих функций он ссылается на существование духовной субстанции, которая сводится им к мышлению. Конечно, эта „гипотеза", подобно схоластическим „тайным" качествам, ничего не объясняет. Ведь сразу же встает вопрос: почему „механизм нашего тела", независимый от сознания, оказывается неразрывно связанным и с волей, и с мышлением? Если тело и душа независимы друг от друга, то почему их единство необходимо для жизни? Каким образом чувственные ощущения, переживания, непосредственно связанные с „механизмом нашего тела", вместе с тем оказывают влияние на якобы независимые от них мышление и волю? И как последние, в свою очередь, могут оказать влияние на человеческие переживания, ощущения, восприятия, являющиеся, по мысли Декарта, проявлениями все того же объективного механизма жизнедеятельности? На все эти вопросы учение Декарта не дает, конечно, ответа. Утверждение Декарта, что „разумная душа" невыводима из материи, свидетельствует лишь о бессилии механистического истолкования психических процессов. Что же касается его утверждений о том, что душа тесно связана с телом и направляет „машину человеческого тела", что смерть человека обусловлена мате-

риальными причинами и не зависит от души, что „душа удаляется после смерти только по той причине, что это тепло (свойственное телу, — *Т. О.*) прекращается и разрушаются те органы, которые служат для движения тела“,[1] то все это свидетельствует лишь о несостоятельности попыток Декарта преодолеть противоречия, связанные с дуализмом, о невозможности согласовать идеалистическое представление о психике с материалистическим представлением о теле, с повседневным опытом и данными науки.

Таковы основные черты физики, вернее, натурфилософии Декарта, явившейся одним из главных теоретических источников французского материализма XVIII в. Это философское учение о природе, не выходящее в общем и целом за границы непоследовательного, метафизического материализма, подытожило достижения естествознания XVI и начала XVII вв.

Энгельс говорит о естествознании этого времени: „Для естествоиспытателей рассматриваемого нами периода он (мир, — *Т. О.*) был чем-то окостенелым, неизменным, а для большинства чем-то созданным сразу. Наука все еще глубоко увязает в теологии. Она повсюду ищет и находит в качестве последней причины толчок извне, необъяснимый из самой природы“.[2] Метафизическая форма буржуазного материализма с самого начала вступала в конфликт с основной материалистической задачей — вывести мир из него самого. Этот конфликт не мог преодолеть Декарт, ограниченность философии которого к тому же заключалась не только в метафизическом подходе к природе, но и в дуалистическом решении вопроса об отношении сознания к бытию. Французские материалисты, отбросив картезианскую метафизику и сохранив и развив далее его физику, сделали плодотворную попытку преодоления вышеуказанного противоречия, в рамках которого движется метафизический материализм. Они настойчиво пытались объяс-

---

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 597.

[2] Ф. Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, 1952, стр. 7.

нить мир из него самого, доказывая, что нет никакого основания „прибегать к содействию сверхестественных сил, чтобы понять образование наблюдаемых нами вещей и явлений“.[1] Однако лишь последующее развитие естествознания дало эмпирическое доказательство этих выводов, и только диалектический материализм смог теоретически обосновать самодвижение, саморазвитие материи.

Важнейшим завоеванием философии Р. Декарта является его учение о методе. Развитие производительных сил ставило перед естествознанием задачу точного, объективного изучения, измерения, описания, классификации всего того, что так или иначе вовлекалось в сферу общественного производства. Такого рода потребность в действительном познании окружающих человека явлений материальной природы была совершенно чуждой схоластической псевдонауке, стремившейся привести эмпирические данные в соответствие с религиозными догматами и положениями канонизированных мыслителей прошлого. Схоластическая ученость интересовалась не истиной, а догматами. Вот почему настойчивые заявления Декарта о том, что его интересует одна только истина, свидетельствовали, вопреки утверждениям буржуазных историков философии, не о „беспартийности“ Декарта, а о его враждебности схоластике. Главное произведение Декарта называется „Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках“. Учению о методе посвящены труд Декарта „Правила для руководства ума“ и, в значительной мере, другие его сочинения.

Ф. Бэкон, которого Маркс характеризует как основоположника английского материализма и естествознания нового времени, первый выдвинул вопрос о методе на передний план. Декарт является в этом отношении его преемником и продолжателем. Исходя из открытий Галилея, Кеплера, из своих собственных естественно-научных достижений, Декарт обосно-

---

[1] П. Гольбах. Система природы. 1925, стр. 25—26.

вывает механико-математическую методологию науки о природе, рассматривая ее как логику механистического естествознания, как „всеобщую науку", указывающую путь правильного, плодотворного исследования всех явлений окружающего мира. Само собой разумеется, что метод, созданный Декартом, не был простым воспроизведением тех эмпирически найденных исследовательских приемов, которые применяли, зачастую непоследовательно, его выдающиеся современники-естествоиспытатели, а представлял собой дальнейшее их творческое развитие, систематизацию, философское обобщение и обоснование. Вот почему Декарт, высоко оценивая Галилея за то, что он, отрешившись от схоластики, применяет математические приемы исследования физических явлений, упрекает его за некоторые уступки схоластике, сказавшиеся, например, в признании положения о том, что природа боится пустоты.

Декарт глубоко верит в величайшее, можно сказать даже, решающее значение правильного научного метода для познания. „Уж лучше, — говорит он, — совсем не помышлять об отыскании каких бы то ни было истин, чем делать это без всякого метода, ибо совершенно несомненно то, что подобные беспорядочные занятия и темные мудрствования помрачают естественный свет и ослепляют ум".[1] По мнению Декарта, польза развиваемого им метода такова, что приступать без него к научным занятиям скорее вредно, чем полезно, ибо познающие без правильного метода уподобляются слепым, хотя они и обладают зрением. Не трудно понять, что эти положения направлены не только против схоластов, но и против тех современных Декарту естествоиспытателей, которые сочетали опытное исследование с мистикой, астрономию с астрологией и приходили к фантастическим выводам, которые были ни чем не лучше схоластических „открытий". Это показывает, что Декарт был глубоко неудовлетворен методологией естествознания своего времени. И это неудиви-

[1] Ренэ Декарт, Избранные произведения, 1950, стр. 89.